בדידה תרגיל 5־פתרון

1. נגדיר סדרה באופן

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$$

.

הוכיחו שלכל n, $a_n < 4$.
פתרון: נוכיח שלמעשה לכל n, $a_n < 3$.
ובכן, עבור $n = 1$ מתקיים $a_1 = 2 < 3$.
נניח שעבור איזשהו n, $a_n < 3$, ונוכיח ש $a_{n+1} < 3$.
$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} < \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3$.

2 . תהי A קבוצה עם n איברים. הוכיחו באינדוקציה ש $|P(A)| = 2^n$.
פתרון:
ראשית, מקרה בסיס: עבור קבוצה עם 0 איברים, כלומר, קבוצה ריקה, ידוע שבקבוצת החזקה יש רק איבר אחד.
כעת, נסמן $A = \{a_1, ..., a_{n+1}\}$. עבור הקבוצה $\{a_1, ..., a_n\}$ ידוע מהנחת האינדוקציה שבקבוצת החזקה שלה יש 2^n איברים, כלומר, יש לה 2^n תתי קבוצות.
תהי B תת קבוצה של $\{a_1, ..., a_n\}$. אז היא גם תת קבוצה של A. כעת, אפשר ל להסתכל על $B' = B \cup \{a_{n+1}\}$, זאת תת קבוצה חדשה של A. בינתיים קיבלנו $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ תתי קבוצות של A. נוכיח שאלה כל תתי הקבוצות.
תי $C \subseteq A$. אם $a_{n+1} \notin C$ אז $C \subseteq \{a_1, ..., a_n\}$, כלומר, C שווה לאיזשהי B. אחרת, $a_{n+1} \in C$. נסמן $B = C \setminus \{a_{n+1}\}$. זאת תת קבוצה של $\{a_1, ..., a_n\}$. קיבלנו ש $C = B \cup \{a_{n+1}\}$ עבור איזושהי תת קבוצה של $\{a_1, ..., a_n\}$. כלומר, כל תתי הקבוצות של A הן מתוך שתי האפשרויות האלו.

3. הוכיחו שקיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \leq n$ מתקיים: $n^2 < 2^n$
פתרון:
נוכיח שלכל $n \geq 5$ מתקיים: $n^2 < 2^n$
עבור 5: $5^2 = 25 < 32 = 2^5$
כעת, נניח שהטענה נכונה עבור איזשהו $n \geq 5$, ונוכיח עבור $n + 1$.
$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + n < n^2 + 3n < n^2 + n^2 = 2n^2 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.