

מד"ר למתמטיקאים

תרגיל 4

הערה: התרגיל מורכב משאלות חובה (9-1) ושתי שאלות בונוס של 20% (10,11)

1. יהיו $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{21})^T$ ו $\mathbf{x}_2 = (x_{12}, x_{22})^T$ פתרונות של המערכת ההומוגנית $\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{x}$, כאשר $\mathbf{P}_{ij} = p_{ij}(t)$, פונקציות רציפות בקטע $((a, b))$ ויהי $W(t) = \det \Psi$ הורונסקיאן של המערכת, כאשר $\Psi_{ij} = x_{ij}$ מטריצה פונדמנטלית של המערכת ההומוגנית. הוכיחו כי

$$W(t) = W_0 \exp \left(\int \text{tr} \mathbf{P} dt \right).$$

(רמז: קבלו את המשוואה $dW/dt = (\text{tr} \mathbf{P})W$).

2. אם $x_1 = y$ ו $x_2 = y'$ אזי ניתן לרשום את המשוואה

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1)$$

כמערכת של שתי משוואות

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

הוכיחו כי אם $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ פתרונות יסודיים של משוואה (2) ו y_1, y_2 פתרונות יסודיים של משוואה (1), אזי $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = cW(y_1, y_2)$ כאשר $c \neq 0$.

3. מצאו פתרון כללי למערכות הבאות

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{א})$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{ב})$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{ג})$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{ד})$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{ה})$$

4. ידוע כי עבור ערכים עצמיים מרוכבים $r_1 = \lambda + i\mu, r_1^* = \lambda - i\mu$ עם וקטורים עצמיים $\xi_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \xi_1^* = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ ניתן לרשום פתרונות יסודיים ממשיים $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ הוכיחו כי $\mathbf{u} = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t), \mathbf{v} = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t)$ בלתי-לויים-לינראית (בת"ל). (רמז: רשמו $c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} = 0$ ובטאו את $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ באמצעות ξ_1, ξ_2 כדי להראות ש $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ בת"ל. כתבו $k_1 \mathbf{u}(t_0) + k_2 \mathbf{v}(t_0) = 0$ והראו כי $k_1 = k_2 = 0$)

5. נתבונן במערכת

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

הראו כי למערכת ע"ע $r = 2$ עם רבוי אלגברי 3. הניחו אם כן פתרונות מהצורה $\xi e^{rt}, \xi t e^{rt} + \eta e^{rt}, \xi \frac{1}{2} t^2 e^{rt} + \eta t e^{rt} + \zeta e^{rt}$ ומצאו את הפתרון הכללי של המערכת. כתבו את המטריצה $\mathbf{T}$ שעמודותיה הם הוקטורים ξ, η, ζ . מהי מטריצה זו? מהי הטרנספורמציה $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$?

6. מצאו פתרון כללי למערכות הלא הומוגניות הבאות

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0 \quad (\text{ג})$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \quad (\text{ד})$$

7. נתבונן בבעיית שטורם ליוביל

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y$$

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \quad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0. \quad (3)$$

ע"י שמוש בזהות לגרנג'

$$\int_0^1 L[u]v dx = \int_0^1 [-(pu')'v + quv] dx,$$

כאשר u, v פונקציות ממשיות גזירות פעמיים ברציפות ב $[0, 1]$ המקיימות את תנאי השפה של בעייה (3), הראו כי L אופרטור צמוד לעצמו $(L[u], v) = (u, L[v])$ כאשר

$$(f, g) = \int_0^1 f g dx, \forall f, g \in C^2[0, 1]$$

מכפלה פנימית.

8. מצאו פונקציות עצמיות מנורמלות לבעיות שטורם ליוביל הבאות

$$y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0 \quad (\text{א})$$

$$y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, y(0) = 0, y(1) = 0 \quad (\text{ב})$$

(רמז: הציבו $y = s(x)u(x)$ וקבעו את $s(x)$ כך שהמד"ר עבור u אינה מכילה איברים מהצורה $u'(x)$. פתרון את בעיית השפה עבור u וע"י כך מצאו ע"ע ווקטורים עצמיים לבעייה המקורית.)

9. הראו כי פונקצית גרין של בעיית שטורם ליוביל

$$-y'' = f(x), y'(0) = 0, y(1) = 0$$

$$G(x, s) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq s \leq x \\ 1-s, & x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad \text{נתונה ע"י}$$

$$y = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds.$$

(רמז: מצאו פתרון כללי לבעייה האי הומוגנית בעזרת ואריציית הפרמטרים והציבו את תנאי השפה המתאימים).

בנוסף: בשתי השאלות הבאות נתבונן בבעיות שטורם-ליוביל לא הומוגניות

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x)$$

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0$$

כאשר μ פרמטר ו f רציפה ב $[0, 1]$. לבעיות כאלו קיים פתרון יחיד

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(\lambda_n - \mu)} \phi_n$$

כאשר $b_n = (f, \phi_n)$, אם $\mu \neq \lambda_n, \forall n$. אחרת, אם $\mu = \lambda_m$ אזי:

(א) אם f, ϕ_m אורתוגונליים קיים פתרון המכיל איבר הפרופורציוני ל ϕ_m
 $(c, c\phi_m)$ שרירותי). פתרון זה כמובן, אינו יחיד.

(ב) אחרת, אין פתרון

10. מצאו פתרון לבעיות האי הומוגניות הבאות

(א) $y'' + 2y = -x, y(0) = 0, y'(1) = 0$

(ב) $y'' + 2y = -1 + |1 - 2x|, y(0) = 0, y'(1) = 0$

11. בבעיות הבאות קבעו האם קיים ערך של a עבורו קיים פתרון. מצאו את הפתרון אם קיים.

(א) $y'' + 4\pi^2 y = a + x, y(0) = 0, y(1) = 0$

(ב) $y'' + \pi^2 y = a, y(0)' = 0, y'(1) = 0$

(ג) $y'' + \pi^2 y = a - \cos \pi x, y(0) = 0, y(1) = 0$