

תרגול 4-אפשרית

+

תרגילי חזרה על השיעורים הקודמים תת מרחבים
אינווריאנטים

תרגיל:

- יהי $V = P_2[\mathbb{R}]$ מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ ממעלה קטנה או שווה ל-2 ותהי $T: V \rightarrow V$ המוגדרת ע"י $T(p(x)) = p(x) + (x+1)p'(x) - x^2 p''(x)$ כאשר $p'(x)$ היא הנגזרת הראשונה של $p(x)$ ו $p''(x)$ היא הנגזרת השנייה של $p(x)$.
- חשבו את המטריצה $[T]$ ביחס לבסיס הסטנדרטי $\{1, x, x^2\}$.
 - חשבו את הערכים העצמיים של T .
 - חשבו את הפולינום המינימלי של T .

פתרון:

סעיף א

נמצא תחילה את המטריצה המייצגת ביחס לבסיס הסטנדרטי.

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{aligned} T(1) &= 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x) &= 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x^2) &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 \end{aligned}$$

סעיף ב

המטריצה משולשית עליונה ולכן הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$.
הערכים העצמיים הם: 1, 2.

סעיף ג

הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$
 לכן שתי האפשרויות היחידות לפולינום המינימלי הן:
 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)^2(x-2)$.

נציב את המטריצה בפולינום $(x-1)(x-2)$ ונקבל $\neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

והפולינום

המינימלי הוא $(x-1)^2(x-2)$.

תרגיל:

תהא A מטריצה מרוכבת

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & i & i \\ 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- הוכח ש A ניתנת ללכסון.
- הוכח ש A דומה ל A' .
- מצא מספרים מרוכבים a, b, c, d כך ש $A^{-1} = aI_4 + bA + cA^2 + dA^3$.

פתרון:

סעיף א

A מטריצה משולשת עליונה, לכן האיברים על האלכסון הם הערכים העצמיים. הערכים העצמיים של A הם $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i, \lambda_4 = -1$ ל A 4 ערכים עצמיים שונים כסדר המטריצה A . בהרצאה ראיתם שאם למטריצה מסדר n יש n ערכים עצמיים שונים אז היא לכסינה.

סעיף ב

הוכחנו בסעיף קודם כי A לכסינה, לכן קיימת P הפיכה ו D אלכסונית המקיימות $D = P^{-1}AP$. נקבל ש $A' = (P')^{-1}D'P' \Leftarrow A' = (PDP^{-1})' \Leftarrow A = PDP^{-1}$. נסמן $P' = Q$, מכיוון ש D מטריצה אלכסונית $D' = D$ ואז נקבל $A' = Q^{-1}DQ$. קיבלנו כי A, A' דומות לאותה מטריצה D ומטרנזיטביות בדמיון מטריצות נקבל ש A, A' דומות.

ראינו כי 0 אינו ערך עצמי של A , לכן A הפיכה וקיימת A^{-1} .
מסעיף א נקבל שהפולינום האופייני של A : $p_A(x) = (x-1)(x-i)(x+i)(x+1) = x^4 - 1$.
לפי משפט קיילי המילטון A שורש של הפולינום האופייני של A , לכן
$$A^{-1} = A^3 \Leftarrow AA^3 = I \Leftarrow A^4 = I \Leftarrow A^4 - I = 0$$

לכן $a = b = c = 0, d = 1$.

הגדרה

יהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור, תת מרחב $U \subset V$ ייקרא אינווריאנטי (תחת T) אם לכל $u \in U$ מתקיים $T(u) \in U$.

במילים פשוטות: מרחב הוא אינווריאנטי ביחס לאופרטור אם האופרטור שולח כל וקטור מתת המרחב לוקטור בתת המרחב

דוגמה

יהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x, y, z) = (x + y, y + z, 0)$.
המרחב הוקטורי $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ הוא אינווריאנטי (תחת T) מכיוון ש
 $T(a, b, 0) = (a + b, b, 0) \in U$.

טענה:

יהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור, $U \subset V$ תת מרחב אינווריאנטי (תחת T), ו- E בסיס של U . אזי $T|_U: U \rightarrow U$ אופרטור וניתן להציג אותו כמטריצה $[T|_U]_E$.

דוגמא:

נתבונן בדוגמא הקודמת $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $T(x, y, z) = (x + y, y + z, 0)$.
 $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ והבסיס הוא $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ כעת נציג את המטריצה $[T|_U]_E$.
ולכן המטריצה המתאימה היא $[T|_U]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $T|_U(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0)$
 $T|_U(0, 1, 0) = (1, 1, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0)$

הערה:

עבור אופרטור $T: V \rightarrow V$ אם E קבוצה בת"ל כך ש- $\text{Span} E$ תת מרחב אינווריאנטי אז ניתן לקבל את המטריצה $[T|_{\text{Span} E}]_E$.

$$\text{span}(E) = \text{span}(\{(1,1,0), (0,0,1)\}) = \{(a,a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

נראה שכל וקטור אינוריאנטי של T שפגמו אינוריאנטי של T

$$T(a,a,b) = (2a, 2a, b) \in \text{span}(E)$$

כל וקטור אינוריאנטי של T !

דוגמא:

יהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z) = (x+y, x+y, z)$.
 הקבוצה $E = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$ בת"ל כך ש $\text{Span} E$ אינוריאנטי תחת T .
 כעת נציג את המטריצה $[T|_{\text{Span} E}]_E$

$$[T|_{\text{Span} E}]_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{aligned} T|_{\text{Span} E}(1,1,0) &= (2,2,0) = 2 \cdot (1,1,0) + 0 \cdot (0,0,1) \\ T|_{\text{Span} E}(0,0,1) &= (0,0,1) = 0 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (0,0,1) \end{aligned}$$

תרגיל:

יהי V מרחב וקטורי, $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, W מרחב אינווריאנטי.
הוכח: $p_{T|_W}(\lambda) \mid p_T(\lambda)$.

פתרון:

אם $V = W$ אז $p_{T|_W}(\lambda) = p_T(\lambda)$ ו $p_{T|_W}(\lambda) \mid p_T(\lambda)$.

נניח ש $V \neq W$.

נסמן $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ בסיס של W .

נשלים את הבסיס של W לבסיס B של V עם וקטורים $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-k}\}$.

נתבונן במטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B .

לכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $T(w_i) \in W$, לכן קיימים $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_k^{(i)}$ יחידים כך ש

$$T(w_i) = \alpha_1^{(i)} w_1 + \alpha_2^{(i)} w_2 + \dots + \alpha_k^{(i)} w_k.$$

בנוסף W תת מרחב של V ו $\{w_1, w_2, \dots, w_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ בסיס של V ולכן ההצגה היחידה של $T(w_i)$ כצירוף ליניארי של איברי הבסיס הנ"ל היא

$$T(w_i) = \alpha_1^{(i)} w_1 + \alpha_2^{(i)} w_2 + \dots + \alpha_k^{(i)} w_k + 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{n-k}.$$

מטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B כלומר $[T]_B^B$ היא

$$\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(k)} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & * & \\ a_k^{(1)} & \dots & a_k^{(k)} & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1}^{(k+1)} & & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_n^{(k+1)} & \dots & a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני ייראה כך:

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_1^{(1)} & \dots & -a_1^{(k)} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & * & \\ -a_k^{(1)} & \dots & \lambda - a_k^{(k)} & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - a_{k+1}^{(k+1)} & & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -a_n^{(k+1)} & \dots & \lambda - a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

מחישוב דטרמיננטה של מטריצת בלוקים נקבל

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a_1^{(1)} & \cdots & -a_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_k^{(1)} & \cdots & \lambda - a_k^{(k)} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{k+1}^{(k+1)} & & \\ \vdots & \ddots & \\ -a_n^{(k+1)} & \cdots & \lambda - a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

נשים לב שהפולינום האופייני של $T|_W$ הוא

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a_1^{(1)} & \cdots & -a_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_k^{(1)} & \cdots & \lambda - a_k^{(k)} \end{pmatrix}$$

למה

יהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור.

1. יהי $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$ סכום ישר של מרחבים אינוריאנטים, ולכל $i = 1, \dots, k$ יהי B_i

בסיס של U_i . נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$. אזי

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O & \cdots & O \\ O & [T]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & [T]_{B_k} \end{pmatrix}$$

2. מצד שני, אם

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_k \end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית-בלוקים, אז יש חלוקה של B לאיחוד זר, $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$, כך שלכל

$i = 1, \dots, k$, התת מרחב $U_i = \text{Span} B_i$ הוא אינוריאנטי, ו $[T]_{B_i} = A_i$.

בעזרת החלק השני של הלמה נבנה דוגמא לחלק הראשון של הלמה
ניקח את B להיות הבסיס הסטנדרטי ונתבונן במטריצה

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

נגדיר את ההעתקה הליניארית $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ ע"י

$$T(x, y, z, t, w) = (x + z, x + 2y - z, x + 2y - 2z, t + 2w, 3t + 4w)$$

$$B_1 = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)\}, B_2 = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

נשים לב שהתת מרחבים $U_1 = \text{Span} B_1, U_2 = \text{Span} B_2$ הם אינווריאנטים ואז כדי לקבל חזרה את $[T]_B$

$$\text{נבנה את } [T]_{B_1} \text{ ואת } [T]_{B_2} \text{ . נקבל ש } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ ו } [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{נקבל את מטריצה הבלוקים הדרושה } \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T]_{B_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{נשים לב שאם נשנה את סדר האיברים בבסיס נקבל את מטריצת הבלוקים } \begin{pmatrix} [T]_{B_2} & 0 \\ 0 & [T]_{B_1} \end{pmatrix}$$

מרחבים עצמיים מוכללים

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי כך ש $\dim V = n$ לכל ערך עצמי λ של T , נגדיר את המרחב העצמי המוכלל $K_\lambda = K_\lambda(T) = \ker(T - \lambda I)^n = \{v \in V : (T - \lambda I)^n v = \vec{0}\}$.

דוגמה

עבור המטריצה $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ נקבל שהפולינום האופייני הוא $(\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$ ולכן הערכים העצמיים הם $4, -2$.

נמצא את המרחב העצמי המוכלל עבור הערך העצמי $\lambda = 4$.

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 48 & -12 & 12 \\ 48 & -12 & 12 \\ 36 & -36 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -324 & 108 & -108 \\ -324 & 108 & -108 \\ -216 & 216 & -216 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב האפס הוא $\text{Span}\{(0,1,1)\}$.

באותו אופן ניתן למצוא את המרחב העצמי המוכלל עבור הערך העצמי $\lambda = -2$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -216 & 216 & 0 \\ -216 & 216 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב האפס הוא $\text{Span}\{(1,1,0), (1,1,1)\}$.

הגדרה

קבוצה מהצורה $E = \{T^{m-1}v, \dots, T^2v, Tv, v\}$ כאשר $T^{m-1}v \neq 0$ ו $T^m v = 0$, תיקרא מסלול מאורך m .

הערה

הוכחתם בהרצאה שכל מסלול היא קבוצה בת"ל.

דוגמא

עבור המטריצה מהדוגמא הקודמת $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים

$$(\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$$

ראינו ש $K_4 = \text{Span}\{(0,1,1)\}$ ו $K_{-2} = \text{Span}\{(-1,-1,0), (1,1,1)\}$

נראה ש $K_4 = \text{Span}\{(0,1,1)\}$ תת מרחב אינוריאנטי

$$[T]_{K_4} = (4) \text{ ואז } \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in K_4$$

נראה ש $K_{-2} = \text{Span}\{(-1,-1,0), (1,1,1)\}$ תת מרחב אינוריאנטי

$$[T]_{K_{-2}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ואז } \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K_{-2}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K_{-2}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ ואז אם } B = \{(-1,-1,0), (1,1,1), (0,1,1)\}$$

The background is a light beige color. In the top-left corner, there is a white circle partially cut off by the edge, with several blue dashed wavy lines flowing downwards and to the right. In the bottom-right corner, there is another white circle partially cut off, with blue dashed wavy lines flowing upwards and to the left. A solid red line also flows from the bottom-right towards the center.

בהצלחה!!!