צורת זורדן

25 במאי 2016

פולינום מינימאלי

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ הפיכה כך ש $\left(A^3+A\right)(A-2I)=0$ ומקיימת כי $tr(A)=2$. מצא פ"מ ופ"א

פתרון מהנתון הקבל כי הפולינום $g(x)=\left(\lambda^3+\lambda\right)(\lambda-2)=\lambda\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2)$ מאפס את A ולכן הפ"מ מחלק אותו. מכאן ש

$$m_A(\lambda)\in\left\{\lambda\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2),\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2),\lambda(\lambda-2),\lambda\left(\lambda^2+1\right),\lambda\left(\lambda^2+1\right),\lambda^2+1,(\lambda-2),\lambda\right\}$$

כיוון ש A הפיכה, אין לה ע"ע 0 ולכן אין גורם λ.נמשיך:

ההפוילנום $(\lambda-2)$ לא יכול להיות כי זה סותר את $tr(A)=2$

הפולינום λ^2+1 לא יכול להיות כי אז $A^2+I=0$ מה שגורר $A^2=-I$. אם נוציא דט' נקבל כי $|A|^2=-1$ מה שלא יכול להיות.

לכן $m_A(\lambda)=\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2)$. בתור מטריצה מרוכבת יש לה רק את הע"ע $\pm i,2$. כיוון שהסכום שלהם =2 אזי יש לה רק ע"ע בודד ששווה 2 ($tr(A)$ שווה סכום הע"ע המרוכבים שלה)

ולכן $p_A(A)=\left(\lambda^2+1\right)^3(\lambda-2)$ (כי החזקה צריכה להיות 7)

הערה: הדט' של A =2 כי יש לה הע"ע (כמטריצה מרוכבת) הם $\pm i,\pm i\pm i,2$ והט' = מכפלתם

ז'ירדון

הגדרה: בלוק זורדן הוא מטריצה מהצורה

$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{k\times k}$$

למשל:

$$J_3(0)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0\end{pmatrix},J_4(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

עובדות:

1. בלוק זורדן אינו לכסין (עבור $k>1$). יש לו ו"ע עצמי יחיד $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ של ע"ע λ.
2. פ"א=פ"מ . למשל ל $J_k(3)$ זהו $(\lambda-3)^k$
3. מתקיים כי $J_k(\lambda)=J_k(0)+\lambda I$

הגדרה: מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ היא בצורת זורדן אם היא מטריצת אלכסונים בלוקים כאשר כל בלוק הוא בלוק זורדן. כלומר מהצורה

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

משפט: $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ צמודה למטריצה בצורת זורדן (כלומר קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP=J$, J בצורת זורדן) אמ"מ הפ"א $p_A(\lambda)$ מל"ל.
במקרה זה מתקיים במטריצה J כי

1. מספר הפעמים שע"ע λ_0 מופיע על האלכסון = ר"א של λ_0
2. מספר הבלוקים של λ_0 = ר"ג של λ_0
3. גודל הבלוק הגדול ביותר = החזקה של $(\lambda-\lambda_0)$ בפ"מ

הערה: המטריצה J נקראת צורת זורדן של A והיא יחידה עד כדי סדר בלוקים
דוגמאות:

1. עבור המטריצה $A=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$ מתקיים כי:
   (א) פ"א = $p_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^3$
   (ב) פ"מ $m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$
   (ג) ר"ג: $\dim V_1=2,\dim V_{-2}=1$
   (ד) מתקיים

λ	Alg.=$\#\lambda$	Geo.=# Blocks	Power in m_A = Biggest Block
1	3	2	2
-2	1	1	1

ולכן צורת זורדן של A היא

$$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-2\end{pmatrix}$$

2. נתון עבור מטריצה A כי:

(א) פ"א = $p_A(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-4)^4$

(ב) פ"מ $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$

ולכן נסיק כי מתקיים

λ	Alg.$=\#\lambda$	Geo.$=\#$ Blocks	Power in m_A = Biggest Block
2	3	$\in\{1,2,3\}$	2
4	4	$\in\{1,2,3,4,5\}$	2

ולכן צורות זורדן האפשריות של A הם

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & 1 \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

שימו לב כי אם יש ר"א של 2 הוא 3 אזי יש לו לכל היותר 3 בלוקים. כיוון שהבלוק הגדול הוא מסדר 2 (כלומר יש שתי 3 "ביחד") אזי מספר הבלוקים הוא לכל היותר 2. בנוסף לא יכול להיות בלוק יחיד כי אז הוא מסדר 3 בניגוד לנתון שהגדול מסדר 2. שיקולים דומים אפשר להפיעיל על ע"ע =4.

3. נתון עבור $A \in \mathbb{F}^{7\times 7}$ ניל' (כלומר קיים k כך ש $A^k = 0$) כי: $A^2 \neq 0$ ו $rank(A) = 4$. מכאן ש

(א) פ"א = $p_A(\lambda) = \lambda^7$ (כי למטריצה ניל' קיים ע"ע בודד =0)

(ב) ומכאן ש- פ"מ $m_A(\lambda) = \lambda^k$ כאשר $k \in \{3,4,5,6,7\}$ (כי $A^2 \neq 0$)

ולכן נסיק כי מתקיים

λ	Alg.$=\#\lambda$	Geo.$=\#$ Blocks	Power in m_A = Biggest Block
0	7	$7-4=3$	k

ולכן צורות זורדן האפשריות של A הם

(א) עבור $k=3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) עבור $k=4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(ג) עבור $k=5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(ד) עבור $k=6/7$ לא ניתן כי לא יהיו 3 בלוקים.