תרגיל 6 - שאלה 1.

טעות בשאלה. זאת פשוט הגדרה של וקטור משיק. השאלה הנכונה היא:

"הראו ש $v\in M_T(x)$ אם ורק אם $\nabla F(x)v=0$".

מכיוון שלא שאלתי, לא אכתוב את זה.

שאלה 2: הפרכה.

ניקח

$$M=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<z^2 \text{ או } (x,y,z)=(0,0,0)\}$$

זה למעשה פנים של חרוט כפול, שהוספנו לו את הנק' $(0,0,0)$.

קל לראות, שבכל נק' $(0,0,0)\neq(x,y,z)\in M$ יש מישור משיק ממימד 3, שכן

$$M\setminus\{(0,0,0)\}=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<z^2\}$$

היא קבוצה פתוחה.

כמו כן, קל לראות שהוקטורים $(0,0,1),(\frac{1}{2},0,1),(0,\frac{1}{2},1)$ הם וקטורים משיקים ל M ב $(0,0,0)$. הם בת"ל ופורשים מרחב ממימד 3, וקיבלנו הפרכה.

מצד שני הקבוצה אינה משטח, מכיוון שתת"ק של $\mathbb{R}^n$ היא משטח n-מימדי אם ורק אם היא קבוצה פתוחה.

(הטענה האחרונה נכונה, מכיוון שממשפט הפונקציה ההפוכה משתמע שאם $\varphi:U\to\mathbb{R}^3$ רגולרית, לכל נק' $x\in U$, יש סביבה W כך ש $\varphi(W)$ פתוחה ב $\mathbb{R}^3$ ...

תרגיל 6 - שאלה 3.

סעיף 1:

נסמן

$$F(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2^3 + 2x_3 + x_4^2 - 9 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 - 1 \end{pmatrix}$$

$$p = (1, -1, 3, -1)$$

נבדוק תחילה ש p מקיימת את המשוואה

$$F(p) = 0.$$

זהו חישוב פשוט, ונקבל 0 עליו.

ע"מ למצוא בסיס למרחב משיק, נפתור את המשוואה

$$\nabla F(x) v = 0.$$

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} 3 & -3x_2^2 & 2 & 2x_4 \\ 3 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

נציב $x = (1, -1, 3, -1)$ ונקבל:

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

~~נציב ונקבל~~

נמצא בסיס למרחב הפתרונות:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נדרג

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

נציב $x_3 = 0, x_4 = 1$ ו $x_3 = 1, x_4 = 0$ ונמצא בסיס

שאלה 3 - המשך.

ונקבל בסיס למרחב הפתרונות.

במקרה ראשון, $(x_3=0,\ x_4=1)$

$$3x_1-3x_2-2=0$$
$$6x_2+6=0$$

נקבל $x_2=-1$

$x_1=\frac{1}{3}$.

במקרה השני

$$3x_1-3x_2+2=0$$
$$6x_2-3=0$$

נקבל $x_2=\frac{1}{2}$, $3x_1+\frac{1}{2}=0 \Leftarrow 3x_1+2-3\cdot\frac{1}{2}=0$

$x_1=-\frac{1}{6}$.

הבסיס הוא

$$\left\{\left(\frac{1}{3},-1,0,1\right),\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{2},1,0\right)\right\}$$

כמובן שיש שוב אפשרויות.

סעיף ב: באופן דומה לסעיף ד,

נחשב ∇F ונמצא בסיס

למרחב האפס שלו. הבדיקה ש $1,-1,-2$

נמצא על המשטח ו-∇F בעל דרגה 2,

כלומר שונה מאפס בנק', נבדל (2.

כמובן ש F נתונה על ידי

$$\cancel{F(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x^2+y^3+z-1\\ x+3y+z-2\end{pmatrix}} \qquad F(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x^2+y^3+z-1\\ x+3y+z-2\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 2 ב - המשך:</u>

$$\nabla F(x,y,z)\Big|_{(1,1,-2)} = \begin{pmatrix} 4x & 3y^2 & 1 \\ x & 3y & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,-2)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

נדרג ...

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

מרחב האפס של המטריצה נפרש ע"י

$$\cancel{\left(0, -\frac{1}{3}, 1\right) = (1, 0, 1)}$$

$$\left(0, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

תרגיל #6, שאלה 5. כיוון אחד ברור.

אם נניח שלכל $x\in M$, יש סביבה U וקבוצה פתוחה $V\subseteq \mathbb{R}^k$, ופונקציה חח"ע, פתוחה ורגולרית $\varphi:V\to M$

כך ש $\varphi(V)=U$, אזי לכל כדור פתוח B שמכיל את p

שמקיימת ~~$\varphi(x)$~~ $\varphi(p)=x$, שכן לכל $x\in M$ קיים

כדור פתוח B ב $\mathbb{R}^k$ וסביבה U של x ב M,

כך ש $\varphi(B)=U$ ו φ חח"ע, ורגולרית.

כיוון השני גם ברור... על מנת להוכיח אותו נשתמש בהגדרה שקולה למשטח: M הוא משטח k-מימדי אם לכל

$x\in M$ קיימת סביבה U של x, $V\subseteq\mathbb{R}^k$,

$f:V\to\mathbb{R}^{n-k}$ גזירה ברציפות, כך ש ~~$U=\{(v,f(v))\}$~~

$U=\{(v,f(v))\mid v\in V\}$. (עד כדי תמורה של קואורדינטות)

נשים לב, ~~$g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$~~

ש $g:V\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי,

$g(v)=(v,f(v))$ היא פונקציה חח"ע, רגולרית

ופתוחה.

חח"ע ורגולריות, מתקבלות מיד מרציפות הנגזרת של f,

ובדיקת שוויון ברכיב הראשון.

על מנת להראות ש g פתוחה נשים לב,

שאם W פתוחה ב V, אזי $W\times\mathbb{R}^{n-k}$

היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$, ו

$$W'=(W\times\mathbb{R}^{n-k})\cap U=\{(\omega,f(\omega))\mid \omega\in W\}$$

היא קבוצה פתוחה ב U.

מכיוון ש W' פתוחה ב U.

שאלה # 5

אם $\varphi: U \to A$ ו $\psi: V \to B$ הן פרמטריזציות של A ו B בהתאמה, אזי ~~α~~ $\alpha: U \times V \to A \times B$ המוגדרת על ידי ~~α~~ $\alpha(u,v) = \alpha(\varphi(u), \psi(v))$ היא פרמטריזציה של $A \times B$.

כזכור, שטח הפנים של $A \times B$ נתון על ידי

$$\int_{U \times V} \sqrt{\det\left(D_\alpha^t(u,v)\, D_\alpha(u,v)\right)}$$

נשים לב, ש ~~D_α~~ $D_\alpha(u,v)$ היא מטריצת בלוקים

$$\begin{pmatrix} D_\varphi(u) & 0 \\ 0 & D_\psi(v) \end{pmatrix}.$$

$$D_\alpha^t = \begin{pmatrix} D_\varphi^t(u) & 0 \\ 0 & D_\psi^t(v) \end{pmatrix}$$

ומתקיים

נכפיל ונקבל

$$D_\alpha^t D_\alpha = \begin{pmatrix} D_\varphi^t(u) D_\varphi(u) & 0 \\ 0 & D_\psi^t(v) D_\psi(v) \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה נתונה

$$\det\left(D_\varphi^t(u)\, D_\varphi(u)\right) \det\left(D_\psi^t(v)\, D_\psi(v)\right).$$

מפוביני:

$$\int_{U \times V} \det\left(D_\varphi^t(u) D_\varphi(u)\right) \det\left(D_\psi^t(v) D_\psi(v)\right) du\, dv =$$

שאלה 5 – המשך: מפוביני

$$S(A\times B)=\int_{U\times V} \det\left(D\varphi^{t}(u)D\varphi(u)\right)\det\left(D_{\psi}^{t}(v)D_{\psi}(v)\right)du\,dv =$$

$$\int_{U} \det\left(D\varphi^{t}(u)D\varphi(u)\right)du \int_{V} \det D_{\psi}^{t}(v)D_{\psi}(v)\,dv$$

$$= S(A)\,S(B)$$

שאלה 6 – בדיוק כמו תרגיל 6 תשע"ז, שאלות 2, 3.

שאלה 7 – בדיוק כמו תרגיל 6 תשע"ז, שאלה 4