

פתרון מועד א' – מד"ר – 88-240 – 06/02/25

זמן המבחן: שלוש שעות. חומר עזר: נוסחאון מצורף, מחשבון מותר משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.
מרצה: דר' ארז שיינר.

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = xy$ המקיים $y(0) = 1$.

נפתור כפרידה

$$\frac{y'}{y} = x$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

$$y = \pm e^C e^{\frac{1}{2}x^2}$$

נציב $x = 0$ ונדרוש $y(0) = 1$ על מנת לקיים את תנאי ההתחלה

$$1 = \pm e^C e^0$$

לכן $\pm e^C = 1$, כלומר $C = 0$ ובבחר את הפתרון החיובי וסה"כ קיבלנו את הפתרון

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $y' = xy + e^{\frac{x^2}{2}}$ המקיים $y(0) = 1$.

נפתור את זה כמד"ר לינארית

$$y' - xy = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$a(x) = -x$$

$$b(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$A(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

ולכן הפתרון הוא

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2} \left(C + \int e^{\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) = e^{\frac{1}{2}x^2} \left(C + \int 1 dx \right) = e^{\frac{1}{2}x^2} (C + x)$$

נציב את תנאי ההתחלה $y(0) = 1$ ונקבל

$$e^0(C + 0) = 1$$

ולכן $C = 1$ וסה"כ הפתרון הוא

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2} (1 + x)$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y'' + 4y = \sin(2x)$ המקיים $y(0) = y'(0) = 0$.

מדובר במד"ר לינארית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים, והגורם הלא הומוגני מתאים לשיטת הניחוש.

הפולינום האופייני של המד"ר ההומוגנית המתאימה הוא

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x = \pm 2i$$

ולכן הבסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית הוא $\cos(2x), \sin(2x)$

כעת ננחש פתרון, ונשים לב ש $\sin(2x)$ מתאים לזוג המרוכב $\pm 2i$ שהם שורשים של הפולינום האופייני מריבוי 1 כל אחד. לכן הניחוש הוא

$$y_p = c_1 x \cos(2x) + c_2 x \sin(2x)$$

נגזור ונציב במד"ר

$$y_p' = c_1 \cos(2x) - 2c_1 x \sin(2x) + c_2 \sin(2x) + 2c_2 x \cos(2x) =$$

$$= (c_1 + 2c_2 x) \cos(2x) + (c_2 - 2c_1 x) \sin(2x)$$

$$y_p'' = 2c_2 \cos(2x) - 2(c_1 + 2c_2 x) \sin(2x) - 2c_1 \sin(2x) + 2(c_2 - 2c_1 x) \cos(2x)$$

נציב במד"ר

$$y_p'' + 4y_p = \sin(2x)$$

$$2c_2 \cos(2x) - 2(c_1 + 2c_2 x) \sin(2x) - 2c_1 \sin(2x) + 2(c_2 - 2c_1 x) \cos(2x) + 4(c_1 x \cos(2x) + c_2 x \sin(2x)) = \sin(2x)$$

כעת נשווה את המקדמים של $\sin(2x), x \sin(2x), \cos(2x), x \cos(2x)$ בשני הצדדים:

$$\sin(2x) \rightarrow -2c_1 - 2c_1 = 1$$

$$\text{לכן } c_1 = -\frac{1}{4}$$

$$x \sin(2x) \rightarrow -4c_2 + 4c_2 = 0$$

כאן אין מידע חדש, אבל זה מסתדר (יאי)

$$\cos(2x) \rightarrow 2c_2 + 2c_2 = 0$$

לכן $c_2 = 0$

$$x \cos(2x) \rightarrow -4c_1 + 4c_1 = 0$$

ושוב זה מסתדר.

סה"כ הפתרון הפרטי הוא

$$y_p = -\frac{1}{4}x \cos(2x)$$

ולכן הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה:

$$y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

לכן

$$y = c_1 \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$$

נגזור

$$y' = 2c_1 \cos(2x) - \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2}x \sin(2x)$$

נציב

$$y'(0) = 0 \rightarrow 2c_1 - \frac{1}{4} = 0$$

ולכן

$$c_1 = \frac{1}{8}$$

סה"כ הפתרון למד"ר המקיים את תנאי ההתחלה הוא

$$y = \frac{1}{8} \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x)$$

4. כדור בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ נזרק כלפי מעלה במהירות התחלתית בגודל 20 מטר לשנייה.

הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה בגודל $mg = m \cdot 10$,

וכוח התנגדות האוויר ששווה בגודלו לגודל המהירות בריבוע $v^2(t)$.

תוך כמה זמן יגיע הכדור לגובה המקסימלי?

נסמן את מיקום הכדור בזמן t בעזרת הפונקציה $y(t)$.

נניח כי הכיוון החיובי של ציר ה- y הוא מעלה (כיוון התנועה ההתחלתית של הכדור), וכי הכדור התחיל לנוע מגובה אפס.

כיוון שאנו עוסקים רק במקטע של התנועה בו הכדור עולה למעלה, התנגדות האוויר מפעילה כוח כלפי מטה, כלומר עם סימן שלילי. לכן לפי החוק השני של ניוטון:

$$F = ma$$

$$-mg - v^2 = ma$$

נזכור כי $a = v'$ ונציב את הקבועים ונקבל את המד"ר

$$v' = -10 - v^2$$

שהיא מד"ר פרידה (כמובן)

$$\frac{dv}{10 + v^2} = -dt$$

נחשב את האינטגרל השמאלי קודם כל

$$\int \frac{dv}{10 + v^2} = \frac{1}{10} \int \frac{dv}{1 + \left(\frac{v}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{10}}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{10}}\right)$$

לכן סה"כ

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{10}}\right) = -t + C$$

$$\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{10}t + C$$

$$\frac{v}{\sqrt{10}} = \tan(-\sqrt{10}t + C)$$

וסה"כ עד כה פונקציית המהירות היא

$$v(t) = \sqrt{10} \tan(-\sqrt{10}t + C)$$

נציב את תנאי ההתחלה, לפיו $v(0) = 20$ (המהירות ההתחלתית היא 20 מטר לשנייה כלפי מעלה)

$$20 = \sqrt{10} \tan(C)$$

ולכן

$$C = \arctan\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right)$$

כלומר פונקציית המהירות היא

$$v(t) = \sqrt{10} \tan\left(\arctan\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right) - \sqrt{10}t\right)$$

הכדור יגיע לגובה המקסימלי כאשר המהירות תתאפס, כלומר כאשר

$$\sqrt{10}t = \arctan\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right)$$

$$t = \frac{\arctan\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right)}{\sqrt{10}} \approx 0.447 \text{ sec}$$

5. נסמן ב D את אופרטור הגזירה, ב I את אופרטור הזהות, ונסמן $S = D - xI$.

מצאו את הפתרון הכללי למד"ר $y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

רמז: הביטו באופרטור S^2 .

ראשית נעזר ברמז הנדיב:

$$\begin{aligned} S^2 &= (D - xI)(D - xI) = D^2 - D(xI) - xD + x^2I = D^2 - I - xD - xD + x^2I = \\ &= D^2 - 2xD + (x^2 - 1)I \end{aligned}$$

והפלא ופלא

$$S^2y = y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y$$

לכן, קבוצת פתרונות המד"ר היא $\ker S^2$

ראשית נחשב את $\ker S$

$$Sy = 0$$

$$(D - xI)y = 0$$

$$y' - xy = 0$$

ולפי שאלה 1 ידוע כי $e^{\frac{1}{2}x^2} \in \ker S$ מקיים את המשוואה הזו.

כעת, נרצה למצוא y עבורו $Sy \in \ker S$ ולכן $S^2y = S(Sy) = 0$

כלומר נרצה

$$Sy = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

או

$$y' - xy = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

שזו בדיוק המד"ר משאלה 2 (מי היה מאמין??)

ולכן נקבל פתרון נוסף

$$y = (1+x)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

נוודא כי שני הפתרונות הללו בת"ל, ולכן מהווים בסיס למרחב הפתרונות בעזרת הוורונסקיאן:

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}x^2} & (1+x)e^{\frac{1}{2}x^2} \\ xe^{\frac{1}{2}x^2} & e^{\frac{1}{2}x^2} + x(1+x)e^{\frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1+x \\ x & 1+x(1+x) \end{pmatrix} = \\ &= e^{x^2} \cdot (1+x(1+x) - x(1+x)) = e^{x^2} \neq 0 \end{aligned}$$

כלומר הפתרונות אכן בת"ל וסה"כ הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}x^2} + c_2 (1+x)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

נוסחאות מד"ר

חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:

כתיב דיפרנציאלי – את המד"ר $y' = f(x, y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x, y)dx$

מד"ר פרידה – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$

כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

מד"ר הומוגנית – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $z = \frac{y}{x}$ נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$. $\int \frac{1}{g(z)-z} dz = \ln|x| + C$

ניתן להציג את $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

במקרה זה $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

מד"ר לינארית מסדר ראשון – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחה

$$y = e^{-A(x)} \left(C + \int b(x)e^{A(x)} dx \right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

משוואת ברנולי – יהי $n \neq 0, 1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.

נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.

נמצא את z ונחליף $y = z^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$.

מד"ר מדוייקת – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x, y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.

שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.

2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F = \int Pdx + c(y)$.

3. נגזור ונשווה למקדם השני $Q = \frac{\partial}{\partial y} (\int Pdx + c(y))$, וכך נמצא את $c(y)$.

4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x, y) = C$.

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ אינו תלוי ב- y .
2. במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$.
3. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).
4. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y' = f(x, y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.

המשוואה האינטגרלית – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$.

משפט הקיום והיחידות – תהי $f(x, y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$.

נסמן ב- M את החסם של $|f(x, y)|$ בתחום, ונסמן $a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

אזי קיים פתרון יחיד y לבעיית הקושי $y' = f(x, y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ בתחום $|x - x_0| \leq a'$.

חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1. $y(t)$ מיקום
2. $v(t) = y'(t)$ מהירות
3. $a(t) = y''(t)$ תאוצה

החוק השני של ניוטון - $F = ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g \approx 9.82 \text{ m/sec}^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם c הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.

הורדת סדר למד"ר מסדר שני ללא המשתנה – עבור מד"ר מהצורה $y'' = f(y, y')$

1. נחפש פונקציה $p(y)$ עבורה $p'p = f(y, p)$.

2. נחפש פונקציה y המקיימת $y' = p(y)$.

מד"ר לינארית – מד"ר מהצורה $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ נקראת מד"ר לינארית מסדר n .
אם $b(x) = 0$ המד"ר נקראת הומוגנית.

בעיית קושי למד"ר לינארית – מציאת פונקציה המקיימת את המד"ר הלינארית מסדר n ואת תנאי ההתחלה

$$y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$$

משפט קיום ויחידות – אם המקדמים $a_i(x), b(x)$ רציפים בקטע I אזי קיים פתרון יחיד בקטע I המקיים את בעיית הקושי.

מרחב הפתרונות – מרחב הפתרונות למד"ר הלינארית ההומוגנית מסדר n עם מקדמים רציפים הוא ממימד n .

פתרון כללי למד"ר לינארית – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים, יהיו $y_1, \dots, y_n$ בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית ויהי y_p פתרון פרטי למד"ר האי הומוגנית. אזי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y = y_p + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

הורונסקיאן – עבור הפונקציות $y_1, \dots, y_n$ נגדיר את הורונסקיאן

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

תלות לינארית של פתרונות – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I , ויהיו $y_1, \dots, y_n$ פתרונות למד"ר.

אזי הפתרונות ת"ל אם ורק אם הורונסקיאן מתאפס בכל הקטע I .

מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים – הפולינום האופייני של המד"ר $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$ הוא

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

אם $\lambda \in \mathbb{R}$ שורש ממשי של הפולינום האופייני מריבוי k , אזי הוא תורם את הפתרונות

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

למד"ר ההומוגנית.

אם $\lambda = a \pm bi \in \mathbb{C}$ זוג שורשים מרוכבים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד, אזי הם תורמים את הפתרונות

$$e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx), x e^{ax} \cos(bx), x e^{ax} \sin(bx), \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos(bx), x^{k-1} e^{ax} \sin(bx)$$

למד"ר ההומוגנית.

שיטת הניחוש עבור מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים – עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax}$$

כאשר a שורש של הפולינום האופייני מריבוי k ננחש פתרון פרטי

$$y_p = x^k(d_0 + d_1x + \dots + d_mx^m)e^{ax}$$

עבור המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax} \cos(bx)$$

או המד"ר

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m)e^{ax} \sin(bx)$$

כאשר $a \pm bi$ שורשים של הפולינום האופייני מריבוי k כל אחד ננחש פתרון פרטי:

$$y_p = x^k(d_0 + d_1x + \dots + d_mx^m)e^{ax} \cos(bx) + x^k(t_0 + t_1x + \dots + t_mx^m)e^{ax} \sin(bx)$$

שיטת וריאצית המקדמים בעזרת כלל קרמר למציאת פתרון פרטי – תהי מד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים רציפים בקטע I :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

ויהיו $y_1, \dots, y_n$ פתרונות המהווים בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר ההומוגנית. אזי הפונקציה

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

מהווה פתרון פרטי למד"ר אם לכל i מתקיים כי

$$c'_i(x) = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \text{ וכן } A_i \text{ היא המטריצה המתקבלת מ-} A \text{ ע"י החלפת העמודה } i \text{ בעמודה}$$

טורי טיילור –

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

מערכת מד"ר – עבור מערכת מד"ר מהצורה $\vec{y}^{(n)} = A\vec{y}$, כאשר v_1 ו"ע עם λ_1 של המטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ננחש פתרון $\vec{y} = f \cdot v_1$, ונקבל כי הוא אכן פתרון אם $f^{(n)} = \lambda_1 f$.

משוואת אוילר – משוואת אוילר הומוגנית היא משוואה לינארית מהצורה

$$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

על מנת למצוא את הפתרונות של משוואת אוילר הומוגנית נבצע את השלבים הבאים:

1. נציב $y = x^r$ במשוואה, נצמצם את x^r ונקבל את המשוואה האינדנציאלית.

2. אם $r \in \mathbb{R}$ שורש מריבוי k של המשוואה האינדנציאלית, נקבל את הפתרונות

$$x^r, \ln(x) x^r, \dots, (\ln(x))^{k-1} x^r$$

3. אם $a \pm bi \in \mathbb{C}$ שורשים מריבוי k כל אחד של המשוואה האינדנציאלית נקבל את הפתרונות

$$x^a \cos(b \ln(x)), x^a \sin(b \ln(x)), \ln(x) x^a \cos(b \ln(x)), \ln(x) x^a \sin(b \ln(x)), \dots$$

$$\dots, (\ln(x))^{k-1} x^a \cos(b \ln(x)), (\ln(x))^{k-1} x^a \sin(b \ln(x))$$

תגובה להלם עם קונבולוציה

$$\text{תהי מד"ר } y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

ותהי תגובה להלם $s(x)$ כלומר הפתרון למד"ר ההומוגנית המקיים $s(0) = 0$ וכן $s'(0) = 1$.

אזי פתרון פרטי למד"ר הלא הומוגנית הוא הקונבולוציה עם התגובה להלם

$$y(x) = f * s = \int_{x_0}^x f(u)s(x-u)du$$

חלק ד' – התמרת לפלס והדלתא של דירק:

$$\mathcal{L}(y) = \int_0^\infty e^{-st}y(t)dt - \underline{\text{התמרת לפלס}}$$

התמרות לפלס ידועות –

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-sa}$$

תכונות התמרת לפלס –

יחידות –

אם y_1, y_2 רציפות וכן $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2)$ אזי $y_1 = y_2$.

לינאריות –

$$\mathcal{L}(y_1 + ay_2) = \mathcal{L}(y_1) + a\mathcal{L}(y_2)$$

התמרת הנגזרת הראשונה –

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

התמרת הנגזרת –

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(y) - s^{n-1}y(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

נגזרת ההתמרה –

$$\mathcal{L}(ty) = -F'(s)$$

הזזה של המשתנה $-s$ אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$F(s-a) = \mathcal{L}(e^{at}y(t))$$

הזזה של המשתנה $-t$ אם $F(s) = \mathcal{L}(y)$ אזי

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}(u(t-a)y(t-a))$$

כאשר $u(t)$ היא פונקצית המדרגה:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$