פתרון תרגיל בית 9 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ה

שאלה 1. יהי G גרף לא מכוון. הוכיחו שאם לכל קודקוד בגרף דרגה 2 או יותר, אז יש מעגל בגרף.

פתרון. בגרף $G = (V, E)$ יש הכרח יותר משני קודקודים, שכן אחרת לא היה לכל קודקוד לפחות שני שכנים. לפי משפט לחיצת הידיים מתקיים

$$2\,|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2\,|V|$$

ולכן מספר הצלעות גדול או שווה למספר הקודקודים בגרף. לפי משפט מן התרגול, בגרף כזה בהכרח יש מעגל (תזכורת: בעצים בני n קודקודים יש $n-1$ צלעות).

שאלה 2. בנו גרף לא מכוון שבו דרגות כל הקודקודים גדולות מ-10 ויש בו קודקוד שאינו נמצא על אף מעגל.

פתרון. אפשרות אחת היא לבנות גרף כוכב $K_{1,11}$ שבו "נצמיח" גרף מלא K_{12} מכל זרוע בכוכב.

ביתר פירוט: נניח שישנו גרף כוכב עם מרכז שנסמן 0, ולו אחד עשרה שכנים שנסמנם $\{1, 2, \ldots, 11\}$. כעת נוסיף לכל אחד מן הקודקודים $\{1, 2, \ldots, 11\}$ אחד עשרה שכנים חדשים, ונחבר את כל הקשתות בין השכנים החדשים (בנפרד לכל קודקוד). ברור שלקודקוד 0 יש דרגה גדולה מ-10. שאר הקודקודים שייכים לתת־גרף שהוא גרף מלא, שבו לכל הקודקודים דרגה 11. נשים לב שהקודקוד במרכז לא שייך לאף מעגל. הרי כדי לסגור מעגל חייבים להשאר בתוך אחד מתת־הגרפים המלאים, והקודקוד במרכז לא נמצא שם.

שאלה 3. הוכיחו שגרף לא מכוון G הוא קשיר אם ורק אם לכל זוג קודקודים u, v יש מסלול פשוט בין u לבין v.

פתרון. הכיוון של "רק אם", $(\Rightarrow)$ הוא ברור. הרי כל מסלול פשוט הוא בפרט מסלול.

בכיוון השני, מפני ש-G קשיר, אז יש מסלול בין כל זוג קודקודים. מה שעשוי למנוע ממסלול בין קודקודים u, v להיות פשוט הוא חזרה יותר מפעם אחת על קודקודים מסויימים. בהכרח דרך הקודקודים שבהם מבקרים יותר מפעם אחת, ישנו מעגל במסלול. אפשר להוריד אותו, ולבדוק האם הוא סופי. מפני שהמסלול הוא סופי, תמיד התהליך של הורדת מעגלים מהמסלול יעצר, ונקבל מסלול פשוט בין u לבין v.

שאלה 4. כיצד נראה הגרף המשלים של הגרף הדו־צדדי השלם $K_{s,t}$? (ראו הגדרה 5.2.12 בספר).

פתרון. בגרף דו־צדדי $K_{s,t}$ יש שתי קבוצות של קודקודים. באחת יש s קודקודים שאינם מחוברים בינהם, ובשנייה יש t קודקודים שאינם מחוברים בינהם. שאר הקשתות, בין

קודקודים מקבוצות שונות נמצאות בגרף. לכן בגרף המשלים נקבל איחוד זר של שני גרפים מלאים, האחד איזומורפי ל-K_s (המגיע מהקודקודים בקבוצה הראשונה) והשני איזומורפי ל-K_t (המגיע מהקודקודים בקבוצה השנייה).

שאלה 5. נגדיר באופן רקורסיבי מחלקה F של גרפים לא מכוונים. הבסיס: הגרף הכולל קודקוד בודד שייך למחלקה F.
הכלל הרקורסיבי: יהיו G גרף במחלקה F, x קודקוד ב-G ו-y קודקוד חדש שאיננו שייך לקודקודי G. נבנה גרף חדש על ידי הוספת הקודקוד y והצלע (x,y) ל-G. אז גם הגרף החדש שייך למחלקה F.

אילו גרפים נמצאים במחלקה F? הוכיחו תשובתכם.

פתרון. המחלקה F היא המחלקה של העצים. בהינתן עץ T, וקודקוד x בגרף, אם נוסיף ל-T קודקוד חדש y ואת הקשת (x,y) נקבל עץ. הרי הגרף נשאר קשיר, ולא סגרנו מעגל (y הוא עלה בעץ החדש). כל עץ בן n קודקודים ניתן לקבל על ידי הוספה של $n-1$ קשתות כמו בכלל הרקוסיבי, אחרי שמתחילים עם קודקוד בודד.

שאלה 6. יהי n מספר טבעי. יהי גרף G עם 2^n קודקודים שמתאימים לתת־קבוצות של $\{1,\ldots,n\}$. שני קודקודים הם שכנים אם בחיתוך של תת־הקבוצות המתאימות להם יש בדיוק שני איברים.

מה מספר הקודקודים עם דרגה 0 בגרף G? מה הוא מספר רכיבי הקשירות של G?

פתרון. קודקוד בגרף הוא תת־קבוצה. יהי v קודקוד. אם ב-v (כתת־קבוצה!) יש שני איברים לפחות, אז ישנן תת־קבוצות של $\{1,\ldots,n\}$ שבחיתוך שלהן עם v יש בדיוק שני איברים (ודאו! מה קורה אם ב-v יש בדיוק שני איברים? מי הם השכנים שלו אז?), ולכן ל-v דרגה שאינה אפסית. נקבל שהקודקודים המבודדים הם הקודקודים שמקבילים ל-$\varnothing$ ול-$\{i\}$ עבור $1\le i\le n$, שלהן פחות משני איברים. כלומר יש $n+1$ קודקודים עם דרגה 0.

מהתשובה למספר הקודקודים עם דרגה 0, נובע כי ישנם $n+2$ רכיבי קשירות. יש $n+1$ רכיבים עבור הקודקודים המבודדים, ושאר הקודקודים נמצאים ברכיב קשירות אחד (הסבירו איזה מסלול פשוט בין זוג קודקודים אפשר למצוא ברכיב קשירות זה).

שאלה 7. יהי גרף G מסדר n עם k רכיבי קשירות. נבנה גרף חדש שבו אנו מוציאים קודקוד x מהגרף G יחד עם כל הקשתות שחלות ב-x.

מה הוא המספר המינימלי האפשרי והמספר המקסימלי האפשרי של רכיבי קשירות בגרף החדש? הוכיחו תשובתכם ומצאו דוגמאות לחסמים שמצאתם.

פתרון. עבור המספר המינימלי, אם x הוא קודקוד מבודד, אז הוצאתו רק תוריד רכיב קשירות אחד, וניוותר עם $k-1$ רכיבי קשירות.

עבור המספר המקסימלי האפשרי, אם G הוא גרף כוכב, הוצאת המרכז תשאיר $n-1$ רכיבי קשירות.

שאלה 8. $(+)$ חלקכם כבר יודעים שלא כל גרף הוא מישורי, למשל K_5. הוכיחו כי כל גרף סופי ניתן לשיכון במרחב התלת מימדי $\mathbb{R}^3$ ללא חיתוך צלעות (מעין "כל גרף הוא מרחבי").

כאתגר, הוכיחו שאת הגרף אפשר לשכן במרחב כאשר הצלעות הן רק קווים ישרים (רמז: הסתכלו על העקומה (t,t^2,t^3)).

פתרון. דרך אחת היא לשים את כל הקודקודים על ישר אחד. למשל בנקודות $(n,0,0)$ עבור n מספר טבעי. דרך הישר הזה עוברים אינסוף מישורים, שאינם נחתכים אלא בישר הזה. לכן כל קשת אפשר לשכן במישור אחר, ואז בודאי לא יהיה חיתוך צלעות.

דרך אחרת, לפי הרמז, היא להניח את הקודקודים על העקומה (t, t^2, t^3). בהינתן ארבע קודקודים על העקומה $v_i = \left(n_i, n_i^2, n_i^3\right)$ עבור $1 \leq i \leq 4$, נותר להראות שאין חיתוך בין זוג הישרים $v_1 - v_2$ ו-$v_3 - v_4$ המייצגים את הקשתות (v_1, v_2) ו-(v_3, v_4).

שאלה 9. ציירו כמה פאונים כגרפים מישוריים (מקצועות הפאון הן הקשתות בגרף).

דוגמאות לפאונים: קובייה (ובאופן כללי יותר מנסרה), ארבעון (טטראדר), תריסריון ועשרימון קטום ("פאון הכדורגל").

פתרון. ראו פתרונות בקישורים הבאים: קובייה, מנסרות, ארבעון, תריסריון ועשרימון קטום (גרסה נוספת).

בהצלחה!