

PAC learning, VC dimension

אלגוריתמים להפרדה עינאריה של דאטא מסוג עינאריה (לוגיזט): Perceptron, SVM (ענארי, עם hard-margin)

PAC (Probably Approximately Correct)

קבוצה דברים פורמליים שנוצרת כפי עינתים עצומה של למידה מכונה עם ידעיה, לבאמה אפשר לעמוד:

נתונים דאטא שמגיע מתחום X ומתניע באופן עינארי - סל x , יש תוצ $y \in \{0,1\}$ (דעצים, או -1).

מחלקת השערות היא קבוצה פונקציות $H = \{h: X \rightarrow Y \mid \exists \epsilon \in Y\}$ (קבוצה עינים בעלת התדלות של ϵ קב' עם שני איברים)

השדרה - מחלקת השערות H היא PAC-learnable אם יש פונקציה $\eta_H: (0,1)^2 \rightarrow \mathbb{N}$

ואנאריים למידה, כך שלכל $(\epsilon, \delta) \in (0,1)$, $\epsilon, \delta \in \mathbb{D}$ של תחום X ואלו פונקציות $f: X \rightarrow \mathbb{D}$

הרצה של האלגוריתם של מספר דגימות $m \geq \eta_H(\epsilon, \delta)$ שמקבלות דוג' לפי D ומתניעות לפי f תחזיר השערה h כך שהסיכוי של טעות δ -1, פונקציה h loss של h תהיה $\leq \epsilon$.

יש כאן 2 פרמטרים: ϵ - כמה אנחנו מדוניקים (מה שמקשר δ - approximately correct)

δ - מעטא את הודאות שלנו ~~הודאות~~ שכל שהודאה שלנו צדק (ה-Probably)

הענין הוא שאין ברירה אלא להשתמש ב- ϵ ו- δ האלה, כי אי אפשר להיות מושלמים. מספיק ϵ כך, אנחנו לא יכולים להגיע בהודאות אם אנחנו צדקים בעצם ענין של דגימה אקראית של דאטא ה- train.

מ'נ'ק VC וניפוף מרחבים

כפי לדעת אילו מחלקות השערות הן PAC-learnable, נלמדו בתנאי לקוח שלמא

Vapnik ו- Chervonenkis (הידוע כ-VC), למיני במימד VC.

השדרה - תהי מחלקת השערות H של פונקציות $f: X \rightarrow \mathbb{D}$, תהי $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ סופית.

העקבה (restriction) של H על C היא קבוצה פונקציות $f|_C: C \rightarrow \mathbb{D}$ שאפשר

לכווניה מ- H , באומר [ניתור] פונקציה בתור וקטור ה- $(f(c_1), \dots, f(c_m))$ $H|_C = \{f|_C\}$

השדרה - מחלקת השערות H מפצלת (Shatters) קבוצה סופית $C \subset X$ אם $|H|_C = 2^{|C|}$.

באומר, אם C הפונקציות מ- C δ -1, נמצאות ב- H .

30/11/2020, $h_a(x) = \mathbb{1}_{\{x=a\}}$, $\mathcal{H} = \{h_a : a \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ ~~not a vector space~~ ~~not a linear space~~ $\rho(x) = \delta(x)$

אם $C = f(c)$ (ז' $h_{c_{i+1}}, h_{c_{i-1}}$ הן ב וסמלציון האפשרות) אלא מוצא

היאצרה - מ'מפ VC של מחסנת הסכיות H הוא האוס המסימלי של קבוצה $C \subset X$ שאשר מפל.

בענין - $\mathcal{H}$ ה' PAC-learnable $\iff \forall C$ יש סופי.

527

$$X = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{H} = \{h_{(a_1, a_2, b_1, b_2)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (a_1, a_2) \times (b_1, b_2) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \mid \begin{matrix} a_1 \leq a_2 \\ b_1 \leq b_2 \end{matrix}\}$$

17

נראה שה'מחז הוא י: א. ג' קף למצא קבוצה ~~הוא~~ באוסף Y - H מנצח $[f, s, k]$. ~~הוא~~

ד. לכל קבוצה S נקודות ב- $\mathbb{R}^2$, נסמן בה"כ ב- C_j נקודה שבה "אמצעית",

במובן כזה שהקואורדינטות שלה הן לא המינימום ולא המקסימום של אס מ"מ. $\left[\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \right]$

הנקודה היא תמיד ד"מ (עקרון שלרר היחידים - 3 נקודות שבו שבו) $(\min x_i, \max x_i)$ וכל x_i שבו במחנה ח"מ שהיה נקודה אחת.

ממצא שני הופקציה הממפה $f: (0,1,1,1,1)$ לא יכולה להתקיים, יורי הנדלר
 C מוכר במסמן הזה ~~הוא~~ "אמצעי".

5) ה'ע

עכשיו, כשגשג אנו בלי עקמוץ מתי מכלל כשגשג העצירות מסוים שונים על הדאטא באופן כזה שנוכל למצוא עשוי, נפנה לדוגמאות פשוטות:

נתחיל ממפרידים ליניאריים (על-מישורים שמשלבים נרצה שהדאטא יהיה מסוג אחד ומתחתיהם מהשני):

אם $(\bar{w}, b)$ באים שהסיווג של כל נקודה $\bar{x}_i$ בדאטא יהיה $\bar{w} \cdot \bar{x}_i + b > 0$ ואחרת 0. שלם נחות, נדרוש: $y_i = \text{sign}(\bar{w} \cdot \bar{x}_i + b)$ (כלומר התוצאים הם ± 1 במקום ± 0.5)
אנאליזתם אחד למצוא המפריד:

הערה - אפשר להראות שמפרידים אלה הם PAC-learnable ולכן יש גם מה לעבוד

Perceptron - רוצים ש- $y_i = \text{sign}(\bar{w} \cdot \bar{x}_i + b)$, או לחלופין $y_i(\bar{w} \cdot \bar{x}_i + b) > 0$.
(Rosenblatt, 1958)

הערה - מעתה והלאה נתאים מ- b , כי ניתן לכתוב במקום $\bar{x}$ את $(\bar{x}, 1)$ כך ש- $(\bar{x}, 1) \cdot (\bar{w}, b) = \bar{w} \cdot \bar{x} + b$.

אנאליזתם הפריסטרוק מוצגת את המשקלים $\bar{w}$ "אונליין", כלומר לכל דגימה i בעייתית שנמצאת בדאטא (כלומר, בצד הדא נכון של המפריד), w מתקן ספי הדגימה. האנאליזתם:

input: $(\bar{x}_1, y_1), \dots, (\bar{x}_n, y_n)$
initialize by choosing $\bar{w}^{(1)}$.
~~while~~
while $\exists i : y_i(\bar{w}^{(t)} \cdot \bar{x}_i) \leq 0$, do
 $\bar{w}^{(t+1)} = \bar{w}^{(t)} + y_i \bar{x}_i$
 $t = t+1$
Output: $\bar{w}^{(t)}$

הערה - ספי משפט, האנאליזתם יעבור אחרי מס' איטרציות סופי.

• לעתים, במקום לעדכן ב- $y_i \bar{x}_i$, ~~לדחוס~~ η (קטן מ-1, קבוע או משתנה), ~~במקום~~ ומעבירים ב- $y_i \bar{x}_i \eta$. כך, התיקונים שלעולם לא יהיו חריפים מדי וטו יקבלו דברים נכונים.

• האנאליזתם יכולה לקחת מספר איטרציות גדול מאוד (אקספוננציאלי).

SVM - עוזר אנאליזתם למצוא מסווג ליניארי הוא Support Vector Machine.

הצדקה הליניאריות והפשוטה ביותר שלו, מחפשים מישור מפריד כזה שיהיה רחוק

מכל הנקודות (כך שאם נעזר במחיר נקודות בסביבה של נקודה קרובה למישור, שלא יחזו).
אזינו למקום בו הן לא אמורות להישפך

מה זה "רחוק"?

~~המרחק בין הנקודה למישור~~

לענין אם $w=1$, המרחק בין נקודה x למישור $(\bar{w}, b)$ הוא $|\bar{w} \cdot \bar{x} + b|$.

ב- SVM, קואלים שהנקודה הקרובה ביותר למישור (המפריד תמיד, רחוקה כלל המשטר.

$$(w^*, b^*) = \arg \max_{(w,b): \|w\|=1} \min_{i \in \{1, \dots, n\}} |\bar{w} \cdot \bar{x}_i + b|$$

כלומר:

$$s.t. \gamma_i (\bar{w} \cdot \bar{x}_i + b) > 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

מתקבלים את (w^*, b^*) שממקסמים את המרחק המינימלי שיש בין נקודה כלשהי בגאטא לבין המישור, כך שצריך את המכריזים בין הסוגים.

ניסוח שקול:

$$(w^*, b^*) = \arg \min_{(w,b)} \|w\|^2$$

$$s.t. \gamma_i (\bar{w} \cdot \bar{x}_i + b) \geq 1 \quad \forall i=1, \dots, n$$

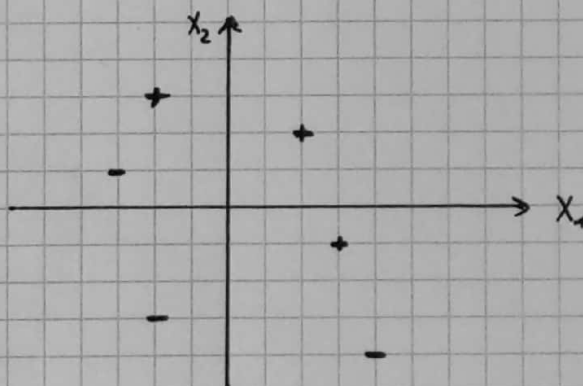
נבדוק אופטימיזציה ריבועית שניתן לפתור [בין אם ע"י תנאי דאקא ובעיה קואלטר, או ע"י שיטת Gradient Descent, לאי שמכיר].

נראה קואלטר שהפרדה ליניארית של גאטא:

יהי האוסף $\{(2,2), (-2,3), (3,-1), (-3,1), (-2,-3), (4,-4)\}$

עם תוצים $\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$ בהתאמה.

נמצא מישור $\bar{w}$ (עם $b=0$) שמכריז בין ה- (+) ל- (-).



• פתרון עם פוסטטרון:

1) נחמיל עם $w^{(1)} = (0,1)$ (יש $x_2=0$). נקודה בעייתית: $(3,-1)$, כי $1 \cdot ((3,-1) \cdot (0,1)) = -1 < 0$.

נחמיל: $w^{(2)} = (0,1) + 1 \cdot (3,-1) = (3,0)$ (יש $x_2=0$).

2) נקודה בעייתית: $(-2,3)$, כי $1 \cdot ((-2,3) \cdot (3,0)) = -6 < 0$.

נחמיל: $w^{(3)} = (3,0) + 1 \cdot (-2,3) = (1,3)$ (יש $x_2 = -\frac{1}{3}x_1$).

3) נקודה בעייתית: $(-3,1)$, כי $-1 \cdot ((1,3) \cdot (-3,1)) = 0 < 0$. [נקודה על הישר בעייתית לנו בעל מקרה].

נחמיל: $w^{(4)} = (1,3) + (-1) \cdot (-3,1) = (4,2)$ (יש $x_2 = -2x_1$).

4) נקודה בעייתית: $(-2,3)$ [בדוק!]. תיקון: $w^{(5)} = (4,2) + (-2,3) = (2,5)$ (יש $x_2 = -\frac{2}{5}x_1$).

אנחנו לבדוק כי סיימנו! הישר מפריק בין ~~הסוגים~~ של הסוגים.

• פתרון עם SVM:

שילוח הספרייה SVM בתוך חבילת Scikit-learn `[from sklearn.svm`
`import LinearSVM`

ואילוף של $b=0$ על הפתרון.

הפתרון שקיבלתי: $X_2 = -0.714X_1$. אכן, אם מציינים ניתן לראות שזה יחסי

רחוק מכל הנקודות, בטח יחסי למפריד שקיבלנו מהפרספטון.