

אלגברה לינארית להנדסה - תרגול 4

9 בנובמבר 2020

1 המשך - כפל שורה ועמודה

כפל מטריצות בהגדרה הרגילה:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

כפל שורה: נרצה לחשב את $R_i(AB)$. נסמן $B = \begin{pmatrix} R_1(B) \\ R_2(B) \\ \vdots \\ R_n(B) \end{pmatrix}$ אז מתקיים:

$$R_i(AB) = R_i(A) \cdot B = \sum_{j=1}^n A_{i,j} \cdot R_j(B)$$

כפל עמודה: נרצה לחשב את $C_j(AB)$. נסמן: $A = \begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \cdots & C_n(A) \end{pmatrix}$ אז מתקיים:

$$C_j(AB) = A \cdot C_j(B) = \sum_{i=1}^n B_{i,j} \cdot C_i(A)$$

תרגילים:

1. תהא $Ax = b$ מערכת משוואות עבור $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. נניח ש- v פתרון למערכת, w פתרון למערכת ההומוגנית המתאימה. נגדיר $B = \begin{pmatrix} v & w & v+w & v-w & w-v \end{pmatrix}$. חשבו את AB .

פתרון: נשים לב ש- $B \in \mathbb{R}^{n \times 5}$, ולכן $AB \in \mathbb{R}^{m \times 5}$. נחשב אותה:

$$C_1(AB) = A \cdot C_1(B) = A \cdot v = b$$

$$C_2(AB) = AC_2(B) = Aw = 0$$

$$C_3(AB) = A \cdot C_3(B) = A(v + w) = Av + Aw = b + 0 = b$$

$$C_4(AB) = AC_4(B) = A(v - w) = Av - Aw = b - 0 = b$$

$$C_5(AB) = AC_5(B) = A(w - v) = Aw - Av = 0 - b = -b$$

בסה"כ:

$$AB = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ b & 0 & b & b & -b \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

2 מטריצות ריבועיות

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נקראת ריבועית. מטריצות מיוחדות:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \forall i, j : A_{i,j} = 0$$

מתקיים: לכל $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$:

$$IA = AI = A \bullet$$

$$0 + A = A + 0 = A \bullet$$

$$0 \cdot A = A \cdot 0 = 0 \bullet$$

עוד סוגים:

- מטריצה משולשית עליונה:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

תחתונה:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

- אלכסונית:

$$\begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$$

- סקלארית:

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} = a \cdot I$$

תרגילים:

1. הוכיחו שכפל של משולשיות עליונות היא משולשית עליונה.

תחילה נבין את התנאי על מטריצה להיות משולשית עליונה: A משולשית עליונה אמ"ם: $\forall i > j : A_{i,j} = 0$. כעת, נתונות A, B משולשיות עליונות. ונראה שגם AB משולשית עליונה: יהיו $i > j$ צ"ל: $(AB)_{i,j} = 0$. ואכן:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (A_{ik} \cdot B_{kj}) = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{(A_{ik} B_{kj})}_{=0} + \sum_{k=i}^n \underbrace{(A_{ik} B_{kj})}_{=0}$$

נשים לב שבחלק הראשון כיון ש- k בין 1 ל- $i-1$ נקבל $i > k$ ולכן $A_{ik} = 0$ לפי הגדרת משולשית עליונה. בדומה, בחלק השני, כיון ששם $k \geq i$ רץ מ- i עד n נקבל: $B_{kj} = 0$ ולכן $k \geq i > j$ ולכן $B_{kj} = 0$ לפי הגדרת משולשית עליונה. בסה"כ קיבלנו סכום של אפסים ולכן נקבל 0.

2.1 שחלוף וסימטריות

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אז המטריצה המשוחלפת שלה היא המטריצה A^t המקיימת:

$$(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$$

למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 7 & 34 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ -4 & 34 \end{pmatrix}$$

הגדרה: מטריצה A ממשית תיקרא סימטרית אם מתקיים: $A = A^t$. והיא תיקרא אנטי-סימטרית אם $A = -A^t$. לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}^t = - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

תכונות:

$$1. \text{ כאשר הכפל מוגדר: } (AB)^t = B^t A^t$$

$$2. (A^t)^t = A$$

$$3. \text{ לכל שתי מטריצות מאותו סדר מתקיים: } (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$4. \text{ עבור סקלאר } \alpha \text{ מתקיים: } (\alpha A)^t = \alpha(A^t)$$

תרגילים:

1. הוכיחו שלכל מטריצה A , המטריצה AA^t הינה סימטרית.
פתרון: כדי שהמטריצה AA^t תהיה סימטרית, צריך להוכיח: $(AA^t)^t = AA^t$. ע"פ תכונות 1,2 נקבל:

$$(AA^t)^t \stackrel{1}{=} (A^t)^t \cdot A^t \stackrel{2}{=} A \cdot A^t$$

2. תהא A מטריצה ריבועית ממשית אנטי־סימטרית. הוכיחו שכל איברי האלכסון הינם 0.

פתרון: נראה שלכל i מתקיים: $A_{ii} = 0$

$$A_{ii} = (-A^t)_{ii} = -(A^t)_{ii} = -A_{ii}$$

אחרי העברת אגפים נקבל:

$$2A_{ii} = 0 \Rightarrow A_{ii} = 0$$

2.2 עקבה

עקבה של מטריצה ריבועית זה סכום איברי האלכסון:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

למשל:

$$tr \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$$

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, נשים לב $AA^t \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ריבועית, ונניח שמתקיים: $tr(AA^t) = 0$. הוכיחו: $A = 0$.
פתרון: פשוט נחשב:

$$tr(AA^t) = \sum_{i=1}^m (AA^t)_{ii} = \sum_{i=1}^m (R_i(A) \cdot C_i(A^t))$$

נשים לב, שמשחלוף נקבל $(R_i(A))^t = C_i(A^t)$, ומשיוויון זה נקבל שהכפל של השורה והעמודה הוא סכום איברי השורה בריבוע:

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right)$$

קיבלנו סכום של כל איברי A בריבוע. כלומר, קיבלנו:

$$0 = tr(AA^t) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n A_{ik}^2$$

כיון שסכום ריבועים תמיד אי־שלילי, והוא 0 אם"ם כל המחוברים הינם אפס. כיון שנתון שהסכום 0, נקבל שכל המחוברים הינם 0, ולכן כל כניסות המטריצה 0.

הערה: לא היינו חייבים להשתמש בעובדה: $(R_i(A))^t = C_i(A^t)$, אלא היינו רואים:

$$0 = \text{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^m (AA^t)_{ii} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}(A^t)_{ki} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n A_{ik} \cdot A_{ik} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right)$$

3 הפיכות

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ תיקרא הפיכה אם קיימת $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש- $AB = I = BA$. הערה: מספיק אחד הצדדים. ההופכית מסומנת A^{-1} . משפט: A, B הפיכות אם"ם AB הפיכה. תרגילים:

1. הוכיחו שאם A הפיכה אז A^t גם הפיכה. פתרון: נתון ש- A הפיכה, לכן יש A^{-1} כך ש- $AA^{-1} = I = A^{-1}A$. ומכאן נקבל:

$$I = I_{\text{left}}^t = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$$

$$I = I_{\text{right}}^t = (A^{-1}A)^t = A^t(A^{-1})^t$$

בסה"כ קיבלנו ש- A^t הפיכה וההופכית היא $(A^{-1})^t$ שלעיתים מסומנת A^{-t} .