תרגול 5

1. הגדרה: X,τ מ״ט A ת״ק. נגדיר את הטופולוגיה על A המושרית מ X להיות $\tau_A = \{A\cap O : O\in\tau\}$. הזוג (A,τ_A) נקרא תת מרחב טופולוגי של (X,τ).
למשל: $\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}}$ הרגיל אזי תת המרחב $A = [0,1)$ הוא הקבוצה A עם הטפולוגיה $\tau_A = \{[0,1)\cap O :\ O\in\tau_{\mathbb{R}}\}$ ולכן למשל $[0,\frac{1}{2})$ פתוח ב A.

2. תרגיל: יהא X,d מ״מ ו τ המטריקה המושרית. יהא A ת״ק הוכיחו כי המטריקה המצומצת ל A משרה את הטפולוגיה המושרית מ τ. כלומר O פתוחה ב A מבחינה מטרית אמ״מ היא פתוחה מבחינה טופולוגית.
פתרון: נובע מכך שלכל $a\in A$ מתקיים כי $B^A(a,r) = B^X(a,r)\cap A$.

3. תרגיל: יהא X מ״ט ו A תמ״ט. הוכיחו כי S סגורה ב A אם קיימת סגורה S' ב X כך ש $S = A\cap S'$.
פתרון: תהא S סגורה ב A אזי $A\backslash S$ פתוחה ב A . לכן קיימת O פתוחה ב X כך ש $A\backslash S = A\cap O$ נגדיר $S' = X\backslash O$ סגורה ב X והיא תקיים
$$A = A\cap X = A\cap(S'\uplus O) = (A\cap S')\uplus(A\cap O) = (A\cap S')\uplus(A\backslash S)$$
ולכן $S = A\cap S'$.

4. תרגיל: יהא X מ״ט ו A תמ״ט. הוכיחו כי ההכלה $f : A\to X$ רציפה.
הוכחה: תהא V פתוחה ב X. $f^{-1}(V) = V\cap A$ פתוחה ב A.

5. תרגיל: תהא $f : X\to Y$. הוכיחו כי $f : X\to Y$ רציפה אמ״מ $f : X\to Im(f)$ רציפה.
הוכחה: מתקיים כי לכל $V\subseteq Y$ מתקיים כי $f^{-1}(V\cap Imf) = f^{-1}[V]\cap f^{-1}[Imf] = f^{-1}V\cap X = f^{-1}V$. לכן
$(\Leftarrow)$תהא V' פתוחה ב Imf אזי $V' = V\cap Im(f)$ עבור V פתוחה ב X. ואז $f^{-1}(V') = f^{-1}(V)$ פתוחה ב X.
$(\Rightarrow)$תהא V פתוח ב Y אזי $f^{-1}(V\cap Imf) = f^{-1}V$ פתוחה ב X.

6. יהיו X וY מרחבים טופולוגיים, וO_i כיסוי של X. נניח שיש פו' רציפות $f_i : O_i\to Y$ שמתלכדות על החיתוכים. אז הן מגדירות פו' $f : X\to Y$ בדרך אחת. טענה: הפו' הנ״ל רציפה.

תכונות הפרדה

1. הגדרה: מרחב טופולוגיה (X,τ) יקרא בעל תכונה הפרדה:

(א) T_0 אם לכל $x_1\neq x_2$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1\in U$ ו $x_2\notin U$ או להיפך.

(ב) T_1 אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימת U פתוחה כך ש $x_1 \in U$ ו $x_2 \notin U$

(ג) T_2 (האוסדורף) אם לכל $x_1 \neq x_2$ קיימות $x_i \in U_i$ פתוחות כך ש $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(ד) T_3 הוא T_1 ואפשר להפריד קבוצה סגורה ונקודה שאינה בקבוצה. כלומר לכל S סגורה ו $x \notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות $x \in U_1, S \subseteq U_2$.

(ה) T_4 הוא T_2 ואפשר להפריד כל 2 קבוצות סגורות זרות.

2. הערה: התכונות בסדר חוזק עולה.

3. דוגמאות:

(א) כל מ"מ הוא T_4 (ולכן כל T_i), למשל $\mathbb{R}$ למשל X, disc.

(ב) $X = \{a, b\}$ שרפינסקי $\tau = \{\{a\}, X, \emptyset\}$ הוא T_0 בלבד.

(ג) $X, \tau_{co-finite}$ כאשר X אינסופית. הוא T_0, T_1 כי $U = \{x_i\}^c$ פתוחה שמקיימת $x_i \notin U$. אבל היא לא T_2 כי אחרת, בפרט קיימות U_1, U_2 פתוחות זרות. נקבל $X = U_1^c \cup U_2^c = (U_1 \cap U_2)^c$. סתירה (איחוד של סופיות הוא סופי.)

(ד) $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ עם $\tau = \{O : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$ היא T_2 כי לכל $x_1 \neq x_2$: בה"כ x_1 ממשי ואז $\{x_1\}, \{x_1\}^c$ יעשו את העבודה.
הוא גם T_3 כי תהא S סגורה ו $x \notin S$ אם $x \neq p$ אזי $\{x\}, \{x\}^c$ פתוחות יפרידו ביניהם. אם $x = p$ אזי S גם פתוחה ו S^cפתוחה לפי הגדרה.

(ה) הוא T_4 כי יהיו S_1, S_2 סגורות זרות. אם p לא שייך לאף אחת אזי S_1, S_2 גם פתוחות. אחרת, בה"כ $p \in S_1$ ואז S_2 פתוחה ומהשלים שלה פתוח לפי הגדרה $S_1 \subseteq S_2^c$.

4. תרגיל: X סופי ו T_1 הוא דיסקרטי.
פתרון: מ"ל שכל הנקודונים פתוחים. אכן יהא x. ונסמן ב $x_1, \ldots, x_n$ את האיברים האחרים. מתכונת T_1 קיימות U_i כך ש $x \in U_i$ ו $x_i \in U_i^c$. טענה $\{x\} = \cap U_i$ הוכחה: $(\subseteq)$ ברור. $(\supseteq)$ כי $\{x_i\} \supseteq \cup U_i^c = (\cap U_i)^c$ ולכן $\{x\} = \{x_i\}^c \subseteq (\cap U_i)$.

5. בכל X שהוא T_2 מתקיים: כל סדרה מתכנסת הגבול יחיד
פתרון: תהא $x_n \to x$ ונניח בשלילה גם $x_n \to x'$ כאשר $x \neq x'$. לפי תכונת T_2 קיימות U_1, U_2 פתוחות זרות כך ש $x \in U_1, x' \in U_2$ מהגדרת גבול קיימים N_1, N_2 כך ש

$$\forall n \geq N_1 : x_n \in U_1$$
$$\forall n \geq N_2 : x_n \in U_2$$

אם ניקח $N = \max\{N_1, N_2\}$ נקבל כי

$$\forall n \geq N : x_n \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

6. תרגיל: האם ההפך הנכון? לא, למשל X אינסופי לא בן מניה עם הקו-מניתית $\tau = \{O : |O^c| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$. מקיימת:

(א) היא לא T_2 כי עבור קבוצות פתוחות לא ריקות מתקיים כי הן לא זרות. אכן נניח בשלילה O_1, O_2 פתוחות לא ריקות המקיימות $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ואז $X = O_1^c \cup O_2^c$ איחוד של שתי קבוצות בנות מניה. סתירה.

(ב) אם $x_n \to x$ אזי x_n קבועה על x לבסוף. כי אחרת בה"כ $x_n \neq x$ ואז נגדיר $O = \{x_n\}^c$ סביבה של x שמקיימת לכל n $x_n \notin O$ סתירה.

7. תרגיל: X הוא T_1 אמ"מ כל נקודון סגור.
פתרון: $(\Rightarrow)$ נתון כי כל נקודות סגור. צ"ל X הוא T_1. יהיו $x_1 \neq x_2$ אזי $x_1 \in \{x_2\}^c$ פתוחה ש x_2 לא שייך אליה.
$(\Leftarrow)$ נתון X הוא T_1 . צ"ל כל נקודות סגור: יהא x נתון. אזי $x' \neq x$ קיימת $O_{x'}$ פתוחה כך ש $x \notin O_{x'}$ וגם $x' \in O_{x'}$ ולכן $\cup_{x' \neq x} O_{x'} = X \setminus \{x\}$ פתוחה ולכן $\{x\}$ סגורה.