

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – מועד א' – תשפ"ה

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x, y, z והפרמטר a , בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x + 4y = a \\ x + a^2y + z = a + 1 \\ x + a^2y + az = a + 2 \\ (4 - a^2)y - z = a^2 - 2a - 1 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

ב. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 0$.

ג. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 2$.

שאלה 2 תהי העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T(1,0,0) = (1,2,0)$$

$$T(0,1,0) = (2,1,0)$$

$$T(1,1,1) = (3,3,3)$$

א. חשבו את $T(0,0,1)$.

ב. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת $\det([T])$.

ג. חשבו את $T(T(a, b, c))$.

ד. מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש $D = P^{-1}[T]P$.

שאלה 3 אין קשר בין הסעיפים.

א. מצאו את כל המספרים המרוכבים המקיימים $iz^7 = iz$.

ב. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ המקיימים כי $z^2 + 2iz + 1 = 0$.

ג. נביט בוקטורים $\vec{v} = (1,1,0)$, $\vec{w} = (1,b,c)$. נתון כי הזווית ביניהם היא $\frac{2\pi}{3}$ וכן $|\vec{w}| = \sqrt{18}$.

מצאו את b .

שאלה 4 בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול.

א. $\int_0^1 \left(\int_0^2 x e^x dy \right) dx$

ב. $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} (x+y) dx \right) dy$

ג. $\iint_D f(x,y) dx dy$, כאשר $f(x,y) = x^2$ והתחום D הוא $D = \left\{ (x,y) \mid \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{matrix} \right\}$

דף נוסחאות מתמטיקה ב לכימאים:

מרכיבים:

חיבור וכפל מרכיבים:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

הגדרה:

יהי $z = a + bi \in \mathbb{C}$ נגדיר את הצמוד המרוכב שלו בצורה הקרטזית להיות

$$\bar{z} = a - bi$$

בצורה הגאומטרית (פולארית):

$$\bar{z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$$

כפל מרוכב בצמוד שלו:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

חילוק מרכיבים:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd + adi + bci}{c^2 + d^2}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

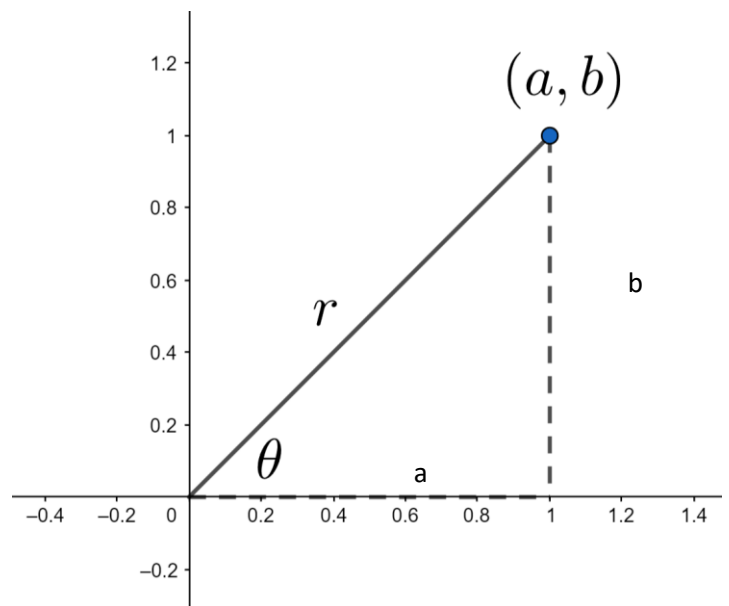
$$\sin(\theta) = \frac{b}{r}$$

$$b = r \cdot \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{r}$$

$$a = r \cdot \cos(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$



בהנתן r, θ הצורה האלגברית היא:

$$a + bi = r \cos(\theta) + i r \sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = r \operatorname{cis}(\theta)$$

כפל מרכיבים בצורה הגאומטרית

$$r_1 \operatorname{cis}(t_1) \cdot r_2 \operatorname{cis}(t_2) = r_1 r_2 (\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(t_1 + t_2)$$

משפט דה-מואבר

$$(r \operatorname{cis}(\theta))^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

פתרון משוואה מרכיבת אם $a + bi \neq 0$ אז יש בדיוק n פתרונות שונים.

$$z^n = a + bi$$

יהי $r \neq 0$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי הפתרונות למשוואה

$$z^n = r \operatorname{cis}(\theta)$$

$$z_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

נוסחאת השורשים :

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

יהי V מרחב וקטורי ויהיו $v_1, \dots, v_k \in V$ וקטורים במרחב.

אומרים כי V נפרש (נוצר) ע"י הוקטורים $v_1, \dots, v_k$ אם

$$V = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k | a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

סימון: אם המרחב V נפרש ע"י $v_1, \dots, v_k$ רושמים כי

$$V = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}$$

פעולה אלגברית בין וקטורים מכפלה סקלרית.

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$$

המכפלה הסקלרית של וקטור בעצמו.

$$(x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = |(x, y, z)|^2$$

מכפלה סקלרית:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\theta)$$

חישוב זווית בין וקטורים ($\vec{v}, \vec{w} \neq 0$)

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \cos(\theta)$$

פונקציות לינאריות:

נוסחא:

$$T(x, y, z) = (x, y)$$

הגדרה: פונקציה

$$T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$$

פונקציה (העתקה) לינארית

$$\begin{aligned} T(v + w) &= T(v) + T(w) \\ T(av) &= aT(v) \end{aligned}$$

כפל מטריצות:

$$\mathbb{F}^{m \times n} \bullet \mathbb{F}^{n \times k} = \mathbb{F}^{m \times k}$$

העתקה שגוזרת פונקציות :

$$\begin{aligned} (f + g)' &= f' + g' \\ (cf)' &= cf' \end{aligned}$$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ מטריצת היחידה}$$

כפל במטריצת היחידה הוא כמו לכפול באחד

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

מטריצה הפיכה

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

חישוב דטרמיננטה במטריצה 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

מכפלה הוקטורית

$$|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin(\theta)$$

כיוון הוקטור מאונך ל w, v .

חישוב מכפלה סקלרית

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$$

הנוסחא למכפלה וקטורית

$$(a, b, c) \times (x, y, z) = (bz - yc, xc - az, ay - bx)$$

נשים לב לדבר הבא: נגדיר מטריצה P שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים של המטריצה.

אם יש מספיר וקטורים עצמיים כך ש P תהיה ריבועית.

לכסון:

$$D = P^{-1}AP$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{אלכסונית} \\ \text{העע על האלכסון}}} = P^{-1} \underbrace{A}_{\substack{\text{וקטורים עצמיים בעמודות} \\ P}}$$

הפיכת מטריצות:

1. נשים את המטריצה A ומימינה את מטריצת היחידה I
2. נדרג קנונית עד שמצד שמאל נגיע למטריצת היחידה I (אם בצד שמאל התאפסה שורה, המטריצה אינה הפיכה)
3. מצד ימין תופיע המטריצה ההופכית A^{-1}

חדוא בשני משתנים:

הקשר בין דיפרנציאל ואינטגרל עפ"י הנוסחא של ניוטון לייבניץ

$$\underbrace{\int_a^b}_{\text{השטח}} f = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{הקדומה}}$$

כלל הסנדוויץ'- רציפות פונקציה

$$h(x, y) \leq g(x, y) \leq f(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

כן רציפה.

גזירות פונקציה:

משוואת מישור דרך נקודה (x_0, y_0, z_0)

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

השיפועים A, B הם הנגזרות החלקיות לפי x, y בנקודה.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) היא

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

אינטגרלים

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ הוא תחום במישור, $f(x, y)$ מודדת את גובה גרף הפונקציה מעל כל נקודה בתחום.

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

נגזרות ואינטגרלים במשתנה אחד.

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln(x)}$$

$$(x^a)' = (e^{a \ln(x)})' = e^{a \ln(x)} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln[f(x)]$
$y' = c^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln c$	$y = c^{f(x)}$
$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$y = e^{f(x)}$
$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$	$y = [f(x)]^n$
$y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = \sin(f(x))$
$y' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = \cos(f(x))$
$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$	$y = \tan(f(x))$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg = \int (f'g + fg')$$

$$fg = \int f'g + \int fg'$$

הנוסחא שקוראים לה "אינטגרציה בחלקים":

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\int \arctan(x) dx = \left\{ \begin{array}{ll} f' = 1 & g = \arctan(x) \\ f = x & g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

שיטת ההצבה:

1. מציבים $t = g(x)$
2. גוזרים ולכן $dt = g'(x)dx$
3. מחליפים כל מופע של x ל t , ואז פותרים את האינטגרל
4. מחזירים את t לשפה של x

הערה: אפשר להתחיל מהצבה "הפוכה" $x = g(t)$ ולהמשיך באופן דומה.

הצבה הפוכה: לחלץ את x ולהציגו כפונקציה של t

זהויות:

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

אם יש לנו בית (גרף) שרצפתו היא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ וגובה התקרה נמדד ע"י $f(x, y)$ אזי האינטגרל הכפול מוגדר להיות

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \text{נפח הבית}$$

שינוי קואורדינטות.

$$(x, y) = (r \cos(t), r \sin(t))$$

$$dx dy \rightarrow r dr dt$$

חישוב סקיצה של שטח הרצפה :

1. למצוא את כל נקודות החיתוך בין העקומות
2. בין כל שתי נקודות חיתוך, לראות מי מעל מי על ידי הצבת נקודה (הסבר: לפי רציפות, בין לבין חיתוכים הפונקציות לא יכולות להחליף מעלה מטה).