

קומבינטוריקה תרגול 12

12 בינואר 2021

1 גרפים

תזכורות:

- למת לחיצת הידיים:

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

מסקנה: יש מס' זוגי של קודקודים עם דרגה אי-זוגית.

- אם G עץ (=קשיר חסר מעגלים) אז $|E| = |V| - 1$.

- אם G קשיר ומתקיים $|E| = |V| - 1$ אז G עץ.

- הגדרת קשיר: לכל u, v יש מסלול פשוט מ- u ל- v .

תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $\forall v \in V : \deg v \geq 2$ אז G קשיר.

(ב) קיים גרף עם שישה קודקודים שדרגותיהם 1, 2, 3, 4, 4, 5.

(ג) קיים גרף עם שישה קודקודים שדרגותיהם 1, 2, 3, 4, 5, 5.

פתרון: א. הפרכה: איחוד זר של שני משולשים.

ב. לא, כי יש מס' אי זוגי של קודקודים עם דרגה אי-זוגית, בסתירה ללמת לחיצת הידיים.

ג. אמנם למת לחיצת הידיים לא נסתרת, אך אין זה אומר מיידית שקיים גרף כזה. לא, נב"ש שקיים. נסמן את הקודקודים ב- $v_1, \dots, v_6$ ונניח ש- $\deg v_5 = \deg v_6 = 5$. כיון שיש רק שישה קודקודים, נקבל שקודקוד עם דרגה 5 מחובר לכל השאר. לכן נקבל:

$$\forall 1 \leq i \leq 4 : \{v_i, v_5\} \in E \wedge \{v_i, v_6\} \in E$$

ולכן:

$$\forall i : \deg v_i \geq 2$$

בסתירה לקיום קודקוד עם דרגה 1.

2. הוכיחו: G עץ אם ורק אם G קשיר מינימלי (כלומר, קשיר והשמטת כל קשת הופכת את G ללא קשיר).

פתרון: $\Leftarrow$: נתון G עץ. צריך להוכיח: G קשיר מינימלי. ראשית, ברור שהוא קשיר כי הוא עץ. כעת, נוכיח שהשמטת קשת הופכת אותו ללא קשיר: אכן, מהיותו עץ נקבל $|E| = |V| - 1$, ואם נשמיט קשת נקבל $E' = E \setminus \{e\}$ ואז $|E'| = |E| - 1 = |V| - 2$ ולכן הגרף (החדש, ללא הקשת e) איננו קשיר.

$\Rightarrow$: נתון גרף קשיר מינימלי. צ"ל: עץ. נתון לנו כבר שהוא קשיר, נותר להוכיח שהגרף חסר מעגלים. נב"ש שיש מעגל $(v_0, v_1, \dots, v_k)$, נשמיט את הקשת $\{v_{k-1}, v_k\}$ והגרף יישאר קשיר, כי בהינתן u, v בגרף: הגרף המקורי קשיר ולכן יש מסלול ביניהם. אם הוא לא עובר בקשת שהשמטנו, אז המסלול גם בגרף החדש, אם הוא עובר בקשת $\{v_{k-1}, v_k\}$ נוכל להחליף אותה במסלול $v_0, v_{k-2}, \dots, v_{k-1}$, ולכן יש מסלול ביניהם גם בגרף החדש. לכן הגרף בהשמטת צלע קשיר בסתירה ל"קשיר מינימלי".

3. יהי G עץ עם לפחות שני קודקודים. הוכיחו: ב- G לפחות שני עלים (כלומר, לפחות שני קודקודים u, v כך ש- $\deg u = \deg v = 1$).

פתרון: טענת עזר: יהי G גרף. אם $\forall v \in V : \deg v \geq 2$ אז ב- G יש מעגל. הוכחה: בהרצאה.

אצלנו: G עץ, ולכן יש לפחות עלה אחד. כי אחרת נקבל $\forall v \in V : \deg v \geq 2$ (כי אין קודקוד עם דרגה 1, וגם אין עם דרגה 0, בגלל הקשירות) ולכן יש מעגל בסתירה להיותו עץ. מכאן נמשיך באינדוקציה על $n = |V|$.

בסיס: עבור $n = 2$ נקבל גרף שהוא שני קודקודים מחוברים בקשת, ואכן יש שני עלים.

נניח נכונות עבור גרף עם n קודקודים ונוכיח עבור $n+1$. יהי G עץ עם $n+1$ קשתות. צריך להוכיח שיש לו שני עלים. ראינו בהתחלה שיש לו עלה אחד (נסמנו v). נוריד את העלה ונקבל גרף עם n קודקודים שהוא עדיין עץ (כי הורדת עלה מעץ משאירה אותו עץ, בהרצאה). לכן יש בו לפחות שני עלים נסמנו u, w . נחלק למקרים:

א. אם בגרף המקורי $\{u, v\} \in E, \{w, v\} \notin E$ אז שני העלים הם u, w . נחלק למקרים:

ב. הפוך - אז u, v עלים.

ג. שניהם לא מחוברים ל- v אז כבר יש לנו שלושה עלים.

ד. שניהם מחוברים ל- v אז בגרף המקורי $\deg v \geq 2$ בסתירה לכך שבחרנו אותו עלה. לכן ד לא אפשרי.