מבוא לטופולוגיה – תרגיל 3

<u>שאלה 1</u>

נסמן ב- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ממשיים שאיבר ה-n שלה הוא מספר x_n.

תהי l_∞ קבוצה של כל הסדרות הממשיות החסומות, ז"א,

$$l_\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, , x_n \in \mathbb{R} \big| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \}$$

<u>א'</u> תוכיחו שפונקציה $d: l_\infty \times l_\infty \to [0,\infty)$ כאשר

$$d_\infty((x_n)\, , (y_n)\,) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|\}$$,

מהווה מטריקה על l_∞.

<u>ב'</u> תוכיחו שתתקבוצה $l_\infty \supseteq F$ כאשר:

$$F = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty \mid \{i \in \mathbb{N} | x_i \neq 0\} - \text{קבוצה סופית} \}$$

היא תתקבוצה לא סגורה במ"מ (l_∞, d_∞).

<u>שאלה 2</u>

<u>א'</u> יהיו M_1, M_2 מרחבים מטריים. תהי פונקציה $f: M_1 \to M_2$ רציפה ו-$M_2 \supseteq F$ קבוצה סגורה. תוכיחו שהקבוצה $M_1 \supseteq f^{-1}(F)$ סגורה.

<u>ב'</u> תוכיחו שהקבוצה $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 |\, x \in \mathbb{R})\}$ סגורה במרחב אוקלידי $\mathbb{R}^2$.

<u>שאלה 3.</u>

תוכיחו שהמרחב המטרי (M, d_{0-1}) קומפקטי אם ורק אם M קבוצה סופית.

<u>שאלה 4.</u>

<u>א'</u> תוכיחו שאם $A \subseteq M$ תתקבוצה סגורה במ"מ M קומפקטי, אז תתמרכב A הוא מ"מ קומפקטי .

<u>ב'</u> תוכיחו שאם תתקבוצה U פתוחה במרחב אוקלידי $\mathbb{R}^n$ אז תתמרחב U אינו קומפקטי.

<u>שאלה 5.</u>

יהיו ρ_1, ρ_2 שתי מטריקות שקולות על M.

תוכיחו: (M, ρ_1) קומפקטי $\Leftrightarrow$ (M, ρ_2) קומפקטי.