מבוא לטופולוגיה – תרגיל 6 (פתרון)

שאלה 1

א) צריך לעשות בדיקות טכניות איבר-איבר. אעזור אם מישהו יתקשה.

ב) תנו דוגמאות בהן מתקיימות הכלות של ממש בנוסחאות 20 ו-24.

פתרון

20. $f(\cap_{\alpha\in I} A_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

דוגמה:

יהיו:

$I = \{1,2\}$, $A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_2\}$ $\ (a_1 \neq a_2)$, $f(a_1) = f(a_2) = b$

אזי $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ו- $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$. אבל $f(A_1) = f(A_2) = \{b\}$

לכן $f(A_1) \cap f(A_2) = \{b\} \supset \emptyset = f(A_1 \cap A_2)$.

24. $f^{-1} \circ f(A) \supseteq A$

דוגמה:

יהיו: $\mathbb{X} = \{a_1, a_2\}$, $A = \{a_1\}$, $f(a_1) = f(a_2) = b$.

אזי $f^{-1} \circ f(A) = f^{-1}\big(f(A)\big) = f^{-1}(\{b\}) = \mathbb{X} \supset A$.

שאלה 2

תזכרת

נסמן ב- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ממשיים שאיבר ה-n שלה הוא מספר x_n.

תהי l_∞ קבוצה של כל הסדרות הממשיות החסומות, ז"א,

$$l_\infty = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty \right\}$$

נזכיר שהוכח בתרגיל בית 3 , שאלה 1. א' שפונקציה $d: l_\infty \times l_\infty \to [0,\infty)$ כאשר $d_\infty((x_n), (y_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n|\}$, מהווה מטריקה על l_∞.

==

יהי X קבוצת הסדרות כך ש-$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} | \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$.

<u>הוכיחו:</u>

א) $X \subseteq l_\infty$,

ב) הקבוצה F של הסדרות מסוג $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0,0, \dots)$ (ז"א, הסדרות עם מספר סופי של איברים לא אפסיים) היא תת-קבוצה ב-X.

ג) F צפופה ב-X בטופולוגיה המושרת על ידי המטריקה d.

<u>פתרון</u>

א) יהיה $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. אזי $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ – לפי שעשינו בבית וגם בכיתה – כל איבריה של הסדרה החל ממספר N מסוים נמצאים בתוך כדור. אם נגדיל את הרדיוס של הכדור כך שגם קבוצה סופית $\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$ תימצא בכדור המוגדל, אז נקבל שהסדרה חסומה, ז"א, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, מש"ל.

ב) יהיה $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. אזי כל איבריה של הסדרה החל ממסםר N מסוים שווים ל-0. אזי (תרגילי בית וכיתה) הסדרה קבועה לבסוף ו-$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, זאת אומרת, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, מש"ל.

ג) צריך להוכיח ש-$\bar{F} = X$.

יהיה $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ ותהי U סביבה של $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$B\big((x_n), \varepsilon\big) \subseteq U$.

כיוון ש-$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. לפי הגדרת הגבול קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$|x_n| < \varepsilon$ כאשר $n \geq n_0$.

אם אנחנו אכשיו נתבונן בסדרה $(y_n) = \big(x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, 0,0, \dots\big)$, אז נראה ש-$(y_n) \in F$ ונקבל:

$$d_\infty((x_n), (y_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| =$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \{|x_1 - x_1|, \dots, |x_{n_0-1} - x_{n_0-1}|, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1}|, \dots\} =$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \{0, \dots, 0, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1}|, \dots\} < \varepsilon.$$

זאת אומרת , $(y_n) \in B\big((x_n), \varepsilon\big) \subseteq U$, ולכן $U \cap F \neq \emptyset$.
אז הוכחנו בעצם שכל סביבה של (x_n) נחתכת עם F . זה אומר ש- $(x_n) \in \bar{F}$, מש"ל.

שאלה 3

נתבונן ברבוע Q במשור $\mathbb{R}^2$ עם הקודקדים: $(0,0), (0,1), (1,1)(1,0)$.

ז"א:

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, y = 1\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

הוכיחו ש-Q אינו איזומורפי ל-$\mathbb{R}$, ולשום קטע (פתוח, סגור או חצי סגור) ב-$\mathbb{R}$ ולשום קרן (פתוחה או סגורה מצד אחד) ב-$\mathbb{R}$.

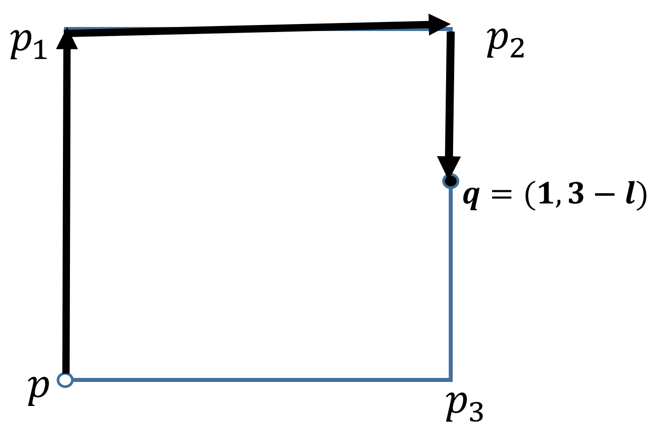
הוכחה.

קודם כל נוכיח טענה הבאה:

טענה

אם p אחד מהקודקודים של הריבוע Q אז $Q' = Q - \{p\}$ מרחב טופולוגי קשיר (כאשר הטופולוגיה מושרת מהמשור האוקלידי)

הוכחת הטעינה. נוכיח את זה כאשר $p = (0,0)$. (לשלושת הקודקודים האחרים ההוכחה תהיה בעצם אותה ההוכחה רק הנוסחהות של φ קצת ישתנו.)



נגדיר פונקציה $\varphi : (0,4) \to Q'$ כך שאם נקודה זזה
לאורך הקו השבור p, p_1, p_2, p_3, p (לקוון השעון ,ראה הציור) אז כשהיא עברה
מסלול עם אורך l , הקוורדינטות של המקום שלה: $\varphi(l)$:

$$\varphi(l) = \begin{cases} (0,l), & l \in (0,1] \\ (l-1,1), & l \in [1,2] \\ (1,3-l), & l \in [2,3] \\ (4-l,0), & l \in [3,4) \end{cases}$$

(הדוגמה בציור: $l = d(p,p_1) + d(p_1,p_2) + d(p_2,q) = 2 + d(p_2,q)$
ו-$\varphi(l) = (1,3-l)$).

קל לראות שהפונקציות:
$\varphi_1 : (0,1] \to Q'$ כאשר $\varphi_1 = \varphi|_{(0,1]}$
$\varphi_2 : [1,2] \to Q'$ כאשר $\varphi_2 = \varphi|_{[1,2]}$
$\varphi_3 : [2.3] \to Q'$ כאשר $\varphi_3 = \varphi|_{[2.3]}$
$\varphi_4 : [3,4) \to Q'$ כאשר $\varphi_4 = \varphi|_{[3,4)}$
רציפות (אפשר להשתמש ,למשל, קריטריון הסדרות).
אם נעיר שהקטעים $(0,1], : [1,2], [2.3], [3,4)$ מהווים כיסוי סגור סופי של $(0,4)$
אז לפי אחד מהמשפטים של בנית פוקציות רציפות (ההרצאה האחרונה) אפשר להסיק
ש-φ רציפה ו-$\varphi\big((0,4)\big) = Q'$. אבל $(0,4)$ מרחב קשיר ולכן התמונה שלו תחת
העתקה רציפה גם קשיר (ההרצאה האחרונה). אזי Q' קשיר , מש"ל.(■ של הטענה)

עכשיו נניח בשלילה שקיים איזומורפיזם $i: Q \to X$.

<u>מקרה 1</u>. $X = \mathbb{R}$ או (a,b) או (a,∞) או $(-\infty, b)$
אזי אם נסמן $p = (0,0)$ אז גם
$i|_{Q-\{p\}}: Q - \{p\} \to X - \{i(p)\}$ איזומורפיזם. אבל לפי הטענה $Q - \{p\}$ מרחב
קשיר ו-$X - \{i(p)\}$ אחוד של שתי קבוצות פתוחות ולא ריקות ולכן – לא קשיר.
<u>סתירה</u>.

<u>מקרה 2</u>. $X=[a,b]$ או $[a,b)$ או $(a,b]$ או $[a,\infty)$ או $(-\infty,b]$.
לפי הטענה אפשר להוציא מ-Q קודקוד p <u>כלשהו</u> ו-$Q-\{p\}$ יהיה קשיר.
אז יהיה $p\in Q$ קודקוד כך ש-:
$i(p)\neq a \wedge i(p)\neq b$ - אם $X=[a,b]$
$i(p)\neq a$ - אם $X=[a,b)$ או $X=[a,\infty)$
$i(p)\neq b$ - אם $X=(a,b]$ או $X=(-\infty,b]$.

זאת אומרת, $X-\{i(p)\}$ המרחב לא קשיר <u>אם מדובר בכל מרחבי X של מקרה 2</u>.
אבל - לפי ההנחה – הוא איזומורפי ל-$Q-\{p\}$, שקשיר לפי הטענה. <u>סתירה</u>.

<u>שאלה 4</u>

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו ש<u>*הגרף של הפונקציה*</u>, זאת אמרת, התת-תמרחב של המשור האוקלידי $\mathbb{R}^2$ המוגדר על ידי נוסחה:

$$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=f(x)\}$$

הוא מרחב טופולוגי קשיר. (<u>רמז:</u> הוכיחו שפונקציה $(x\mapsto(x,f(x)))$ רציפה.)

<u>הוכחה</u>

תהי $g:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R}^2,d_\infty)$ פונקציה כך ש- $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ **לכל** $x\in\mathbb{R}$,
d מטריקה רגילה ב-$\mathbb{R}$ ו-d_∞ מטריקה ב-$\mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי הנוסחה:

$$d_\infty\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$$

(מטריקה הידועה מההרצאות ומהתרגולים).

<u>נוכיח ש-g רציפה בכל נקודה.</u>

יהי $a\in\mathbb{R}$ ו-$x_n\in\mathbb{R}$ - סדרה כך ש-$x_n\to a$. אזי $|x_n-a|=d(x_n,a)\to 0$.
כיוון ש-f רציפה אז $f(x_n)\to f(a)$ ולכן $|f(x_n)-f(a)|\to 0$.

מכאן:

$$d_\infty\Big((x_n,a),\big(f(x_n),f(a)\big)\Big)=\max\{|x_n-a|,|f(x_n)-f(a)|\}\to 0$$

ולכן $\left(x_n, f(x_n)\right) \to \left(a, f(a)\right)$ (ההרצאות) ואז g רציפה ב-a. לפי משפט אחד מההרצאות: g רציפה בכל $\mathbb{R}$.

<u>הערה.</u> הוכחנו רציפות g ביחס למטריקה d_∞ במשור. אבל כידוע לנו המטריקה הזאת שקולה למטריקה אוקלידית ולכן g רציפה ביחס לטופולוגיה המושרת שתי המטריקות השקולות. (סוף הוכחת הרציפות).

עכשיו נעיר ש- $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\} = \boldsymbol{g}(\mathbb{R})$.

כיוון ש- $\mathbb{R}$ מרחב קשיר אז גם G – כתמונה שלו תחת הפונקצי הרציפה g - מרחב קשיר (<u>ההרצאה האחרונה</u>), מש"ל.

<u>שאלה 5</u>

תהי X קבוצה אינסופית. תהי τ - קבוצת תת-קבוצות ב-X כך ש-$\tau = \{U \subseteq X | \text{קבוצה סופית} - U^c\} \cup \{\emptyset\}$.

<u>הוכיחו:</u>

א) τ – טופולוגיה ב-X (עשינו את זה פעם בכיתה!)

ב) (X,τ) מרחב קשיר.

<u>פתרון</u>

א)

1. $\emptyset \in \tau$ לפי הגדרה. $X = \emptyset^c \in \tau$ כי $\emptyset$ קבוצה סופית.
2. יהי $U_\alpha \in \tau$ לכל $\alpha \in I$. אזי:
   $\left(\cup_{\alpha \in I} U_\alpha\right)^c = \cap_{\alpha \in I} U_\alpha^c$. כיוון שכל U_α^c קבוצות סופיות לפי ההגדרת τ, אז גם $\left(\cup_{\alpha \in I} U_\alpha\right)^c$ סופי ו-$\cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ שייך ל $- \tau$.
3. יהי $U_n \in \tau$ לכל $1 \le n \le K \in \mathbb{N}$. אזי:
   $\left(\cap_{1 \le n \le K} U_n\right)^c = \cup_{1 \le n \le K} U_n^c$. כיוון שכל U_α^c קבוצות סופיות לפי ההגדרת τ, אז גם $\left(\cap_{1 \le n \le K} U_n\right)^c$ סופי ו-$\cap_{1 \le n \le K} U_n$ שייך ל $- \tau$.

   אז הוכח ש-τ טופולוגיה. מש"ל.

ב) נניח – <u>בשלילה</u> ש-(X,τ) אינו קשיר. אזי קיימת קבוצה $U \subseteq X$ כך ש-

$$U, U^c \neq \emptyset \quad (*)$$

$$U, U^c \in \tau \quad (**)$$

$$U \cup U^c = X \quad (***)$$

אבל מ-$(**)$ נובע ש-U, U^c קבוצות סופיות. לכן – בגלל $(***)$ – גם X קבוצה סופית. <u>סתירה.</u> אז (X,τ) קשיר. מש"ל.