

צוות הקורס: ארז שיינר, שירה ידעי משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון בלבד

הוראות: יש לענות על כל השאלות, על גבי טופס המבחן במקום המתאים, מחברת הטייטא לא תסרק ולא תבדק.

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C , הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:

א. $A \setminus (B \cap C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

ב. $A \setminus (B \cap C) \supseteq A \setminus (B \cup C)$

ג. $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

ד. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

2. (21 נק') נביט ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow \left(\frac{b-a}{3} \in \mathbb{Z} \right)$$

א. הוכיחו כי R יחס שקילות.

ב. הוכיחו כי $[0]_R = \{3m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

ג. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|[x]_R| = \aleph_0$.

3. (21 נק') נביט ביחס S על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a, b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow ((b = a) \vee \exists n \in \mathbb{N}: b = na^2)$

א. הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.

ב. הוכיחו כי $1 \in \mathbb{N}$ הוא האיבר הקטן ביותר ביחס S , וכן $0 \in \mathbb{N}$ הוא האיבר הגדול ביותר ביחס S .

ג. נביט בקבוצה $A = \{12, 36\}$. מצאו את החסם התחתון $\inf(A)$, והוכיחו את נכונות תשובתם.

4. (18 נק') תהי קבוצה A ותהי פונקציה $f: A \rightarrow A$ אשר אינה הפיכה.

נביט $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$, עבור $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

א. הוכיחו כי לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי f^n אינה הפיכה.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $Im(f) = Im(f^n)$.

5. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם הקבוצה מעוצמה

סופית, מצאו את העוצמה.

א. $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid Im(f) \subseteq \mathbb{Q}\}$

ב. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid Im(f) = \mathbb{R}\}$

את הפתרונות יש לכתוב במקומות המתאימים בדפים הבאים (אפשר לכתוב משני צידי הדף).

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C , הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:

א. $A \setminus (B \cap C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

ב. $A \setminus (B \cap C) \supseteq A \setminus (B \cup C)$

ג. $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

ד. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

פתרון:

2. (21 נק') נביט ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow \left(\frac{b-a}{3} \in \mathbb{Z} \right)$$

א. הוכיחו כי R יחס שקילות.

ב. הוכיחו כי $[0]_R = \{3m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

ג. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|[x]_R| = \aleph_0$.

פתרון:

3. (21 נק') נביט ביחס S על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a, b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow ((b = a) \vee \exists n \in \mathbb{N}: b = na^2)$

א. הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.

ב. הוכיחו כי $1 \in \mathbb{N}$ הוא האיבר הקטן ביותר ביחס S , וכן $0 \in \mathbb{N}$ הוא האיבר הגדול ביותר ביחס S .

ג. נביט בקבוצה $A = \{12, 36\}$. מצאו את החסם התחתון $\inf(A)$, והוכיחו את נכונות תשובתם.

פתרון:

4. (18 נק') תהי קבוצה A ותהי פונקציה $f: A \rightarrow A$ אשר אינה הפיכה.

נביט ב $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ פעמים}}$, עבור $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

א. הוכיחו כי לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי f^n אינה הפיכה.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $Im(f) = Im(f^n)$.

פתרון:

5. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, א או $2^{\aleph}$. אם הקבוצה מעוצמה

סופית, מצאו את העוצמה.

א. $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{Q}\}$

ב. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{Im}(f) = \mathbb{R}\}$

פתרון:

דף נוסף לפתרון שאלה מספר _____:

דף נוסף לפתרון שאלה מספר _____: