רוצים לעבור מחבורה כלשהי באמצעות הומומורפיזם לחבורה אבלית: $G \xrightarrow{F} K$ כך שG חבורה כלשהי וK אבלית.

שואלים אם יש U אוניברסלית כך ש

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & K \\ & U \arrow[ur, "\exists! L"'] & \end{tikzcd}$$

הבנייה חוצה קטגוריות:

בהנתן חבורה G, נגדיר $[G,G] \subseteq G$ ע"י ת"ח הנוצרות ע"י כל האיברים בG מהצורה $aba^{-1}b^{-1}$(כאשר $a,b \in G$). ההפכיים שלהם גם שם: $bab^{-1}a^{-1} = \left(aba^{-1}b^{-1}\right)^{-1}$. גם הצמודים שלהם שם: $\left(gag^{-1}\right)\left(gbg^{-1}\right)\left(gag^{-1}\right)\left(gbg^{-1}\right) = g\left(aba^{-1}b^{-1}\right)g^{-1}$.

לכן היא תת חבורה(מההופכיים) וגם תת חבורה נורמלית(סגורה להצמדות). היא אפילו אופיינית: נשמרת תחת כל אוטומורפיזם, לא רק הצמדות.

הגדרה

איבול של חבורה $\mathrm{Ab}\left(G\right) := {}^{G}/_{[G,G]}$.

היא **אבלית**, כי צ"ל $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ לכל xy, וזה קורה כי

$$[a]\,[b]\,[a]^{-1}\,[b]^{-1} = \left[aba^{-1}b^{-1}\right] = [1] = 1$$

כעת נראה

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & K\,(\text{Abelian}) \\ & \mathrm{Ab}\left(G\right) \arrow[ur, "\exists! L"'] & \end{tikzcd}$$

באופן כללי:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & {}^{G}/_{N} \arrow[dl, "L"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

L קיים אס"ם $N \subseteq \ker f$, בומקרה זה L יחיד.

אבל אם $G \xrightarrow{f} K$ היא אבלית, אז תמיד $[G,G] \subseteq \ker f$. אם נראה זאת עבור היוצרים של $[G,G]$:

$$f\left(aba^{-1}b^{-1}\right) = fafb\left(fa\right)^{-1}\left(fb\right)^{-1} \underset{K \text{ is Abelian}}{=} 1$$

הבנייה הבאה

נתונה קבוצה X. מתעניינים בפונקציות לתוך חבורה K:

$$X \longrightarrow K$$

אפשר כמובן בכיוון ההפוך לקחת חבורה ולשכוח שהיא חבורה ולהתייחס אליה כאל קבוצה רגילה. אבל האם אפשר לבנות פנקטור גלובלי שבהינתן קבוצה נוכל להפוך אותה לחבורה בצורה שהפירוק יעבור דרך החבורה האוניברסלי U:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & L \\ & U \arrow[ur, "\exists! L"'] & \end{tikzcd}$$

נסתכל על הקבוצה $Y = X \uplus \left\{a^{-1} \middle| a \in X\right\}$(צריך להניח שאם $a \in X$ אז $a^{-1} \notin X$).
כאן a^{-1} לא אומר "ההופכי של a", כי אנחנו מדברים על קבוצות, לא על חבורות. ה$^{-1}$ זה פשוט "קשקוש" שמוסיפים כדי להבדיל את הaים מאברי X המקוריים.
W קבוצת המילים בY: $W = \left\{ (a_1, a_2, \dots a_n) \middle| \begin{matrix} a_i \in Y \\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{matrix} \right\}$.
כזכור, יחס שקילות הוא שאם a וa^{-1} מופיעות ברצף(יכול גם להיות בסדר הפוך) אז אפשר לזרוק את שתיהם:

$$\left(a_1, a_2, \dots a_{16}, a, a^{-1}, a_{19}, \dots a_{100}\right) \sim \left(a_1, a_2, \dots a_{16}, a_{19}, \dots a_{100}\right) \sim \left(a_1, a_2, \dots a_{16}, a^{-1}, a, a_{19}, \dots a_{100}\right)$$

ואפשר גם לחבר ולנתק מילים בכל נקודה: $(a_1, a_2)(a_3) \sim (a_1, a_2, a_3) \sim (a_1)(a_2, a_3)$.
נשים לב שיש לנו כבר חבורה של מילים:

- יש פעולת כפל בין איברים(שרשור)
- יש איבר יחידה(המילה הריקה)
- יש הופכי($\left(a_1, a_2, a_3\right)^{-1} = \left(a_3^{-1}, a_2^{-1}, a_1^{-1}\right)$)

כלומר קבוצת מחלקות השקילות $F(X)$ עם פעולת השרשור היא חבורה ויש העתקה $X \to F(X)$ מוגדרת ע"י $x \ni a \mapsto [(a)]$(לא מעתיקים למילה אלא למחלקת השקילות שלה).
נסמן את ההעתקה הזו בj:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f(\text{function})"] \arrow[dr, "j", "a \mapsto j(a)"'] & & K \\ & F(x) \arrow[ur, dashed, "\exists! L"'] & \end{tikzcd}$$

$$\left[\left(b^{-1}\right)\right] = [(b)]^{-1}$$

$$\left[\left(a, b^{-1}, c\right)\right] = [(a)]\,[(b)]^{-1}\,[(c)] = j\,(a)\,j\,(b)^{-1}\,j\,(c)$$

$F\,(X)$ נקראת החבורה החפשית על קבוצה X, ועכשיו בעצם נאלצים להודות שה"קשקוש" $^{-1}$ הוא בעצם האיבר ההפכי.

אנחנו צריכים עדיין למצוא את ההעתקה L ששומרת על הפעולה:

$$L\left(\left[a, b^{-1}, c\right]\right) = \Big(f\,(a)\,f\,(b)^{-1}\,f\,(c)\Big)\,\Big(\underbrace{\qquad}\Big)$$

$$L\left(\left[a, b, b^{-1}, c\right]\right) = f\,(a)\,f\,(b)\,f\,(b)^{-1}\,f\,(c) = f\,(a)\,f\,(c) = L\,([a, c])$$

סימון

נסתכל על $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ ונסמן $F\,(X) = F_n$. נסתכל על מילה:

$$\left[\left(x_3, x_9^{-1}, x_9^{-1}, x_9^{-1}, x_1, x_1, x_1, x_1\right)\right]$$

מכיוון שהמילה הזו היא באמת המכפלה של מילים באורך 1, אפשר לזרוק את הסוגריים ואת הפסיקים:

$$x_3 x_9^{-1} x_9^{-1} x_9^{-1} x_1 x_1 x_1 x_1$$

ואם כבר חושבים על זה בתור חבורה, אפשר כבר לרשום

$$x_3 x_9^{-3} x_1^4$$

תרגיל לדוגמה

להוכיח $F_n * F_m \equiv F_{n+m}$.

דרך פתרון

אין טעם ללכת להגדרה ולבנות את ההעתקה - עדיף ללכת ישר לתכונות האוניברסליות:

$$\begin{tikzcd} & G \\ K \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[dr] & \\ & K \\ H \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$G \longrightarrow K_{\text{Abelian}} \qquad X_{\text{Set}} \longrightarrow K_{\text{Group}}$$

שוב נסתכל על פונקציה מקבוצה לחבורה. הפעם נבחר קבוצה X עם "קצת מבנה" עליה, והפונקציה F תצטרך לכבד את המבנה הזה.

נסתכל על $R \subseteq W = X \biguplus \left\{a^{-1} \middle| a \in X\right\}$. דוגמה: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $R = \left\{x_1 x_2^{-1} x_3^2, x_2 x_2 x_1^{-1}\right\}$.

הR הזה יהיה המבנה שצריך לכבד:

$$(X, R) \xrightarrow{f} K$$

אנו מתעניינים בפונקציות $f : X \to K$ כך שלכל מילה $r \in R$ (לדוגמה $r = ab^{-1}cc$) יתקיים $f(r) = 1$ (כלומר $f(a)\, f(b)^{-1}\, f(c)\, f(c) = 1$).

עכשיו נסתכל על

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & K \\ & FN\left(\text{Elements of } F(x) \text{ represented by the words of } R\right)(x) \arrow[ur, "M(\text{homomorphism})"] \arrow[d, "\rho"] & \\ & {}^{F(X)}\!\big/_{N(\text{Elements of } F(x) \text{ represented by the words of } R)} \arrow[uur, "\exists! L"'] & \end{tikzcd}$$

נסמן את X עם קבוצת המילים R ב$\langle X|R\rangle$, כלומר $\langle x_1,x_2,x_3,x_4|r_1,r_2,r_3\rangle$. לדוגמה:

$$\left\langle a,b\middle|ab^2ab^{-1},a^2,b^7\right\rangle=\left\langle a,b\middle|ab^2ab^{-2}=1,a^2=1,b^7=1\right\rangle=\left\langle a,b\middle|ab^2a=b^2,a=^2=1,b^7=1\right\rangle$$

בעצם, חבורה חופשית היא מקרה פרטי כאשר קבוצת היחסים R היא ריקה, ולכן אפשר לסמן

$$F_n=\langle a_1,x_2,\dots x_n|\rangle$$

וכאן לא רק כותבים כמה יוצרים יש, אלא גם נותנים להם שמות.

ניסוח אחר של התכונה האוניבסלית

בהינתן קבוצת המילים F_n וחבורה $G=\{g_1,g_2,\dots g_n\}$, אפשר לשלוח כל איבר x_n לאיזה לאיפה שאנחנו רוצים, ויהיה אומומורפיזם יחיד.

אם יש חבורה עם יחסים אז אי אפשר לשלוח לאן שאנחנו רוצים.

אם למשל יש לנו $H=\left\langle x,y\middle|xyx^2,x^7,y^2\right\rangle$. אם רוצים לשלוח את x לg ואת y לh, אז צריך לבחור $g,h\in G$ שמקיימים את היחסים האלה:

$$\begin{cases} ghg^2=1\\ g^7=1\\ h^2=1\end{cases}$$

דוגמאות - ניחושים ללא הוכחה

- $\left\langle x\middle|x^7\right\rangle\cong\mathbb{Z}/7$
- $\left\langle a,b\middle|aba^{-1}b^{-1}\right\rangle$ - זה בעצם אומר שהם מתחלפים: $\langle a,b|ab=ba\rangle$. לכן זה איזומורפי ל$(\mathbb{Z}_2,+)$.
- איבול של חבורה: אם $H=\langle a,b,c|r_1,r_2,\dots r_k\rangle$, אז

$$\mathrm{Ab}\left(H\right)=\left\langle a,b,c\middle|r_1,\dots r_k,aba^{-1}b^{-1},aca^{-1}c^{-1},bcb^{-1}c^{-1}\right\rangle$$

ובאופן כללי, צריך להוסיף יחס $xyx^{-1}y^{-1}$ לכל זוג יוצרים x,y.

הגדרה

מילה באותיות G וH נקראת <u>מצומצמת</u> אם לא מופיע בה 1_G או 1_H, וכן לא מופיעות שתי אותיות רצופות מאותה חבורה.

טענה

לכל איבר ב$G*H$ יש נציג יחיד שהוא מילה מצומצמת.

הוכחה

יהי x איבר ב$G * H$. יש לו נציג שהוא מילה מצומצמת ־ כי אחרת תמיד אפשר לצמצם.

נניח A, B שתי מילים מצומצות שקולות. אפשר לבנות סדרה של מילים ביניהם, שכל אחת מהן הפעלה של כלל שקילות יחיד על הקודמת(כלומר הוספה/הסרה של 1_G או 1_H או חיבור/פיצול של הופכיים).

ההבדל בין האורכים של שתי מילות ביניים רצופות הוא ± 1. מA אפשר רק לעלות(כי אי אפשר לצמצם אותה) ואל B אפשר רק לרדת(כי אחרת היה אפשר לצמצם בכיוון ההפוך). לכן המילה באורך מקסימלי בסדרה לא יכולה להיות לא A ולא B. נראה שאת המילה הזו אפשר לוותר ־ או להחליף אותה במינימום מקומי(מבחינת אורך).

נעשה אינדוקציה על סכום אורכי המילים בדרך + מספר הצעדים.

- אם זה 0 ־ אז $A = B$.
- אחרת, ראינו שיש מקסימום באמצע. נראה שאפשר לוותר עליו או להפוך אותו למינימום מקומי ־ ואז מקצרים את סכום האורכים ואולי גם את מספר הצעדים.
  - אם יש פיצול ואז איחוד באיזורים זרים, אז אפשר להפוך את הסדר.
  - אם יש פיצול ואז יש איחוד של אותו פיצול, אז אפשר לותר על זה.
  - אם יש הוספה של יחידה ואז הסרה שלה, אז אפשר לוותר על זה.
  - אם יש פיצול והדבקה בזוג חופף ־ למשל

$$\begin{tikzcd}
g_1 \arrow[d] \arrow[dr] & & g_2 \\
g_1' & g_1'' \arrow[dr] & g_2 \arrow[d] \\
g_1' & & g_1'' \cdot g_2
\end{tikzcd}$$

אז אפשר במקום זה לעשות

$$\begin{tikzcd}
g_1 \arrow[dr] & & g_2 \arrow[dl] \\
& g_1 \cdot g_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
g_1' & & g_1'' \cdot g_2
\end{tikzcd}$$

נתון לנו שלושה חבורות:

$$\begin{tikzcd} & G \\ P \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & H \end{tikzcd}$$

אנו מעוניינים בחבורה K כך ש

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr, "\varphi"] & \\ P \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & K \\ & H \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

כך שהדיאגרמה הזו מתחלפת - כלומר לכל $x \in P$ מתקיים $\varphi \circ g\left(x\right) = \psi \circ h\left(x\right)$.
אנו מעוניינים באובייקט אוניברסלי U:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "\varphi"] & & \\ P \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & U \arrow[r, dashed, "\exists! L"] & K \\ & H \arrow[ur, "l"] \arrow[urr, "\psi"'] & & \end{tikzcd}$$

מכפלת היתוך - Amalgamated Product(שם מלא: Free product with amalgmation)

נגדיר את U:

$$U = {}^{G*H}\big/_{N\left(\left\{g(x)h(x)^{-1} \middle| x\in P\right\}\right)}$$

איברי G, H יוצרים בהגדרה את $G * H$, ולכן הם גם יוצרים את חבורת המנה.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr] & & \\ & G * H \arrow[r, "M"] & K \\ H \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

נותר להראות שלכל $x \in P$,

$$M\left(g\left(x\right)h\left(x\right)^{-1}\right)=\varphi\left(g\left(x\right)\right)\psi\left(h\left(x\right)^{-1}\right)=\varphi\left(g\left(x\right)\right)\psi\left(h\left(x\right)\right)^{-1}=1$$

סימון

$$G\underset{P}{*}H$$

זה סוג של קיצור של

$$\begin{tikzcd}
G & * & H \\
& P \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

כאשר לא איכפת לנו מהם g וh

סה"כ:

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "\psi"] & & \\
P \arrow[ur] \arrow[dr] & & G\underset{{}_g\diagdown P\diagup_h}{*}H \arrow[r] & K \\
& H \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

משפט ון קמפן

יהי X מרחב טופולוגי. יהיו $U,V\subseteq X$ פתוחות כך ש$X=U\cup V$ ו$U\cap V$ לא ריק וקשיר מסילתית.

נבחר נק' בסיס $a\in U\cap V$. אז גם $\begin{array}{l} a\in U\\ a\in V\\ a\in X\end{array}$.

הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd}
& (U,a) \arrow[dr, "k"] & \\
(U\cap V,a) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & (X,a) \\
& (V,a) \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

היא מתחלפת. נמיר את המרחבים הטופולוגיים לחבורות:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,a) \arrow[dr] \arrow[drr, "k_*"] & & \\
\pi_1(U\cap V,a) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \pi_1(U) \underset{\pi_1(U\cap V)}{*} \pi_1(V) \arrow[r, "L"] & \pi_1(X,a) \\
 & \pi_1(V,a) \arrow[ur] \arrow[urr, "l_*"'] & &
\end{tikzcd}$$

אזי L הוא איזומורפיזם.