

פתרון תרגיל בית 4 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). תהי תמורה $\sigma \in S_9$ המוגדרת לפי $\sigma(i) = 10 - i$. כתבו את σ כטבלה, כמכפלת מחזורים זרים ומצאו את הסימן שלה. פתרון. הכתיבה כטבלה היא קלה מאוד:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

עבור מכפלת מחזורים זרים, צריך להזכר בשיטה מהכיתה ולקבל $\sigma = (19)(28)(37)(46)$. זו תמורה שהיא מכפלה של ארבע חילופים ולכן $\text{sign}(\sigma) = 1$, כלומר היא תמורה זוגית.

שאלה 2 (חימום). תארו את כל המחלקות השמאליות ב- $\mathbb{Z}_{60}/\langle 3 \rangle$. פתרון. האיבר 3 הוא מסדר 20, ולכן $|\langle 3 \rangle| = 20$. לפי משפט לגראנז' נקבל

$$|\mathbb{Z}_{60}/\langle 3 \rangle| = \frac{|\mathbb{Z}_{60}|}{|\langle 3 \rangle|} = \frac{60}{20} = 3$$

והמחלקות, עד כדי בחירת נציגים, הן $\{\langle 3 \rangle, 1 + \langle 3 \rangle, 2 + \langle 3 \rangle\}$.

שאלה 3. הוכיחו שאם $H \leq G$ היא מאינדקס 2, אז $a^2 \in H$ לכל $a \in G$. רמז: מי הן המחלקות האפשריות ב- G/H ? עכשיו צריך טענה שהופיעה בכיתה.

פתרון. לפי הנתון יש בדיוק שתי מחלקות שמאליות של H ב- G . בפרט $H \subsetneq G$, כי האינדקס גדול מ-1. לכן יש לפחות איבר אחד $x \in G$ שאינו ב- H . בכיתה ראינו טענה לפיה $xH = H$ אם ורק אם $x \in H$, ולכן קבוצת המחלקות השמאליות היא $G/H = \{H, xH\}$. יהי $a \in G$ ונחלק לשני מקרים.

במקרה הראשון נניח $a \in H$. אז מסגירות לפעולה בחבורה H נקבל $a^2 \in H$. אחרת, במקרה השני נניח $a \notin H$. לכן $aH = xH$, כי אין אף מחלקה שמאלית אחרת. נניח בשלילה כי $a^2 \notin H$. אז $a^2H = xH = aH$ מאותו נימוק. אבל ראינו טענה לפיה $a^2H = aH$ אם ורק אם $b^{-1}c \in H$. במקרה שלנו עבור $b = a, c = a^2$ נקבל $a^2H = aH$ אם ורק אם $a^{-1}a^2 = a \in H$, אבל זו סתירה להנחה $a \notin H$. לכן $a^2 \in H$.

שאלה 4. מצאו את האינדקסים הבאים. משפט לגראנז' הוא שימושי.

א. $[\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60} : \langle (3, 3) \rangle]$

ב. $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (3, 3) \rangle]$ רמז: קודם תארו את המחלקות השמאליות.

ג. $[\mathbb{Z}_{12} \times S_3 : 8\mathbb{Z}_{12} \times A_3]$ תזכורת: בתרגיל הבית השני הוכחתם $8\mathbb{Z}_{12} \leq \mathbb{Z}_{12}$.

פתרון.

א. הסדר של החבורה $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60}$ הוא $60 \cdot 60 = 3600$, והסדר של תת-החבורה $\langle (3, 3) \rangle$ הוא כסדר של האיבר $(3, 3)$, שהוא 20. נחשב בעזרת משפט לגראנז' ונקבל

$$[\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60} : \langle (3, 3) \rangle] = |\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{60}| / |\langle (3, 3) \rangle| = 3600/20 = 180$$

ב. נוכיח כי $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (3, 3) \rangle] = \infty$ לפי זה שנראה ש- $\{(0, n) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ היא קבוצה אינסופית של מחלקות שמאליות שונות (אלו לא כל המחלקות). אם $(0, n) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (0, m) + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ אז

$$(0, n) - (0, m) \in \langle (3, 3) \rangle$$

כלומר ש- $(0, n - m) = (3k, 3k)$ לאיזשהו $k \in \mathbb{Z}$. לכן $n - m = 0$, ולכן $n = m$. כלומר יש אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

ג. אינדקס של תת-חבורות הוא כפלי (הוכיחו!). כלומר אם $K \leq H \leq G$, אז

$$[G : K] = [G : H][H : K]$$

בפרט נקבל

$$[\mathbb{Z}_{12} \times S_3 : 8\mathbb{Z}_{12} \times A_3] = [\mathbb{Z}_{12} \times S_3 : 8\mathbb{Z}_{12} \times S_3][8\mathbb{Z}_{12} \times S_3 : 8\mathbb{Z}_{12} \times A_3]$$

ולכן נוכל לחשב בנפרד. המחלקות השמאליות של $8\mathbb{Z}_{12} \times S_3$ בחבורה $\mathbb{Z}_{12} \times S_3$ הן

$$\{(0, \text{id})(8\mathbb{Z}_{12} \times S_3), (1, \text{id})(8\mathbb{Z}_{12} \times S_3), (2, \text{id})(8\mathbb{Z}_{12} \times S_3), (4, \text{id})(8\mathbb{Z}_{12} \times S_3)\}$$

כי יש העתקה חח"ע ועל למחלקות השמאליות של $8\mathbb{Z}_{12}$ ב- $\mathbb{Z}_{12}$ (לוקחים את הרכיב הראשון). באופן דומה, את האינדקס של $8\mathbb{Z}_{12} \times A_3$ ב- $8\mathbb{Z}_{12} \times S_3$ אפשר לחשב לפי האינדקס של A_3 ב- S_3 , שהוא 2. לכן האינדקס המבוקש הוא $8 \cdot 2 = 16$.
חישוב מהיר אחר, הוא להזכר כי $|\mathbb{Z}_{12}| = 12$, $|A_3| = 3$, $|S_3| = 6$ ו- $|\mathbb{Z}_{12} \times S_3| = 72$.
ושהסדר של מכפלה ישירה הוא מכפלת סדרי הגורמים. לכן, לפי לגראנז' נקבל

$$[\mathbb{Z}_{12} \times S_3 : 8\mathbb{Z}_{12} \times A_3] = \frac{|\mathbb{Z}_{12} \times S_3|}{|8\mathbb{Z}_{12} \times A_3|} = \frac{72}{16} = 4.5$$

שאלה 5. תהי G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ תת-חבורות שלה.

א. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$ וגם $H \neq K$, אז $H \cap K = \{e\}$.

ב. הוכיחו שאם $|H| = 1000$ ו- $|K| = 77$, אז $H \cap K = \{e\}$.

פתרון.

א. איבר היחידה שייך לכל תת-חבורה, ובפרט לתת-החבורה $H \cap K$. יהי $x \in H \cap K$. איבר כלשהו. נניח בשלילה כי $x \neq e$. לכן $|x| > 1$. אנחנו יודעים כי $|x|$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$, ולכן בהכרח $|x| = p$. כלומר $\langle x \rangle = H, K$ והן חבורות אז הן סגורות לפעולה ונסיק $\langle x \rangle \subseteq H, K$. מהנתון $|H| = |K| = p$ נקבל $H = K = \langle x \rangle$ כי ב- $\langle x \rangle$ יש בדיוק p איברים שונים. אך זו סתירה לנתון, ונסיק כי $x = e$.

ב. ידוע לנו כי $H \cap K$ היא תת-חבורה של H ושל K . לכן לפי משפט לגראנז' מתקיים כי $|H \cap K|$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$. לפי הנתון על הסדרים של תת-החבורות, צריך למצוא מספר שמחלק גם את $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ וגם את $77 = 7 \cdot 11$. אך המספר הגדול ביותר שעושה זאת הוא 1. לכן $|H \cap K| \leq 1$. אבל תמיד $|H \cap K| \geq 1$ כי איבר היחידה שייך לכל תת-חבורה (בפרט לחיתוך $H \cap K$), ולכן קיבלנו כי $H \cap K = \{e\}$.

תרגיל 6. תהי G חבורה מסדר 8.

- הוכיחו שאם G ציקלית, אז יש לה תת־חבורה מסדר 4.
- הוכיחו שאם G לא אבלי, אז יש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4.
- מצאו דוגמה נגדית לסעיף הקודם אם G אבלי.
- (רשות) הכללה למקרה שבו G היא חבורה לא אבלי מסדר 2^t (בהכרח $t > 2$). הוכיחו שיש לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4.

פתרון.

א. נניח $G = \langle g \rangle$ ציקלית מסדר 8 עם יוצר g . אז קיימת תת־החבורה הציקלית שנוצרת על ידי $\langle g^2 \rangle = \{e, g^2, g^4, g^6\}$.

ב. תהא G חבורה לא אבלי. לפי משפט לגראנז', הסדר של כל איבר בחבורה סופית מחלק את סדר החבורה. לכן הסדרים האפשריים היחידים בחבורה מסדר 8 הם 1, 2, 4 או 8 (לא בהכרח כל הסדרים משתתפים). יש רק איבר אחד מסדר 1 והוא איבר היחידה. לא ייתכן כי כל שאר האיברים הם מסדר 2, שכן לפי תרגיל שראינו נקבל כי G אבלי. אין בחבורה איבר מסדר 8, שכן אז היא תהיה ציקלית, וכל חבורה ציקלית היא אבלי. מכאן קיים איבר, נאמר $a \in G$, שהוא מסדר 4. הסדר של איבר הוא הסדר של תת־החבורה הציקלית $\{e, a, a^2, a^3\}$ שהוא יוצר.

ג. במקרה זה G לא יכולה להיות ציקלית. נבחר את $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. אפשר לבדוק שהסדר של כל איבר בחבורה זו הוא 2, פרט לאיבר היחידה. לכן אין לה תת־חבורה ציקלית מסדר 4.

ד. באופן דומה לסעיף השני, הסדרים האפשריים היחידים בחבורה מסדר 2^t (כאשר $t > 2$) הם רק מן הצורה 2^k עבור $k \in \{0, 1, 2, \dots, t\}$. ישנו רק איבר אחד מסדר 1. הסדר של כל שאר האיברים לא יכול להיות 2, כי אז G אבלי. אין איבר מסדר 2^t , שכן אז החבורה ציקלית ולכן אבלי. לכן קיים איבר, נאמר $a \in G$, כך ש-

$$o(a) = 2^k > 2$$

נתבונן בתת־החבורה שיוצר האיבר $a^{2^{k-2}}$. ראינו שמתקיים

$$o(a^{2^{k-2}}) = \frac{o(a)}{(o(a), 2^{k-2})} = \frac{2^k}{(2^k, 2^{k-2})} = 4$$

וקיבלנו שזהו איבר שיוצר תת־חבורה ציקלית מסדר 4, כדרוש.

שאלה 7 (רשות). תהינה תמורות $\sigma, \tau \in S_n$. הוכיחו שאם $|\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau)| = 1$, אז $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ הוא מחזור מאורך 3.
 רמז: הראו כי $\text{supp}(\sigma^{-1}) = \text{supp}(\sigma)$ לכל תמורה ובדקו לאן נשלח המספר ששייך לחיתוך התומכים.

שאלה 8 (רשות). כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2 \times n$, ומדפיסה את התמורה כמכפלת מחזורים זרים.

הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותדפיס את מכפלתן כמכפלת מחזורים זרים. למעשה אפשר לממש מחלקה שמייצגת תמורה, עם מתודות לכפל תמורות, למעבר בין הייצוגים השונים של התמורה, לתומך שלה, לסדר וכו'.

בהצלחה!