

## אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 5

21 בדצמבר 2019

1. בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות, ואם כן מצאו את הנגזרת:

$$f(x + yi) = \cos x \cos y + \sin x \sin yi \quad (\text{א})$$

$$f(x + yi) = xy + \frac{y^2 - x^2}{2}i \quad (\text{ב})$$

$$f(z) = z\bar{z} \quad (\text{ג})$$

$$f(x + yi) = e^y \operatorname{cis} x \quad (\text{ד})$$

$$f(x + yi) = e^{xy} \operatorname{cis}(xy) \quad (\text{ה})$$

$$f(x + yi) = \sin x \cos y + (\cos x \sin y)i \quad (\text{ו})$$

$$f(z) = (5 - i)z^3 - iz^5 + 6z^8 \quad (\text{ז})$$

### פתרון:

א. נבדוק קושי רימן:  $U(x, y) = \cos x \cos y, V(x, y) = \sin x \sin y$ , לכן:

$$U_x = -\sin x \cos y, U_y = -\cos x \sin y$$

$$V_x = \cos x \sin y, V_y = \sin x \cos y$$

וכיון ש  $U_x \neq V_y$  נקבל שהפונקציה לא גזירה.

ב.  $U(x, y) = xy, V(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$ , ולכן:

$$U_x = y, U_y = x$$

$$V_x = -x, V_y = y$$

תנאי קושי רימן מתקיים:  $U_x = V_y, U_y = -V_x$ , ולכן הפונקציה גזירה ונגזרתה היא:

$$f'(x + yi) = U_x + V_x i = y - xi$$

ג.  $f(x + yi) = x^2 + y^2$ , ולכן  $V(x, y) = 0$ ,  $U(x, y) = x^2 + y^2$ . נמצא נגזרות חלקיות:

$$U_x = 2x, U_y = 2y$$

$$V_x = 0, V_y = 0$$

משוואות קושי-רימן לא מתקיימות ולכן  $f$  לא גזירה.  
 ד. נקבל:  $U(x, y) = e^y \cos x$ ,  $V(x, y) = e^y \sin x$ . נגזרות חלקיות:

$$U_x = -e^y \sin x, U_y = e^y \cos x$$

$$V_x = e^y \cos x, V_y = e^y \sin x$$

משוואות קושי-רימן לא מתקיימות ( $-e^y \sin x \neq e^y \sin x$ ), ולכן  $f$  לא גזירה.  
 ה.  $U(x, y) = e^{xy} \cos(xy)$ ,  $V(x, y) = e^{xy} \sin(xy)$ . נגזרות חלקיות:

$$U_x = -y^2 e^{xy} \sin(xy), U_y = -x^2 e^{xy} \sin(xy)$$

$$V_x = y^2 e^{xy} \cos(xy), V_y = x^2 e^{xy} \cos(xy)$$

משוואות קושי-רימן לא מתקיימות ולכן  $f$  לא גזירה.  
 ו. כאן  $U(x, y) = \sin x \cos y$ ,  $V(x, y) = \cos x \sin y$ , ולכן הנגזרות החלקיות:

$$U_x = \cos x \cos y, U_y = \sin x \sin y$$

$$V_x = -\sin x \sin y, V_y = \cos x \cos y$$

משוואות קושי-רימן מתקיימות ולכן גזירה, ונגזרתה:

$$f'(x + yi) = U_x + V_x i = \cos x \cos y - (\sin x \sin y)i$$

ז. לפי מה שלמדנו על נגזרת פולינום נקבל:

$$f'(z) = (15 - 3i)z^2 - 5uz^4 + 48z^7$$

2. תהי  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  פונקציה גזירה. כידוע, יש  $U, V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש-

$$f(x + yi) = U(x, y) + V(x, y)i$$

הוכיחו שאם  $V$  פונקציה קבועה אז  $f$  קבועה גם (במילים: אם החלק המדומה של  $f$  קבוע, אז  $f$  קבועה).

הדרכה: השתמשו בכך שאם  $f$  גזירה אז מתקיימות משוואות קושי-רימן, והוכיחו שגם  $U$  קבועה, והסיקו שלכן  $f$  קבועה.

**פתרון:**

כיון ש- $f$  גזירה מתקיימות משוואות קושי רימן:

$$U_x = V_y$$

$$U_y = -V_x$$

אצלנו  $V$  קבועה ולכן נקבל  $V_x = V_y = 0$  (כי נגזרת של קבועה זה 0). ולכן נקבל  $U_x = V_y = 0, U_y = -V_x = 0$ . קיבלנו ששתי הנגזרות החלקיות הינן 0, ולכן  $U$  קבועה. בסה"כ  $f(x + yi) = U(x, y) + V(x, y)i$  היא סכום של פונקציות קבועות ולכן קבועה.

בהצלחה!