מבוא לטופולוגיה - תרגיל 2

<u>שאלה 1</u>

<u>א'</u> תוכיחו שסדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

<u>הוכחה.</u>

תהי x_n סדרה קבועה לבסוף. אזי קיימים $a \in M$ ו- $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \geq n_0 \Rightarrow x_n = a$.

יהיה $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. אז :

$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) = 0 < \varepsilon$. לכן לפי הגדרת גבול הסדרה: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. ■

<u>ב'</u> תהי x_n סדרה במ"מ (M,d) המתכנסת ל-x . יהיה קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל שני איברים $x_m \neq x_n$ מתקיים $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$.

תוכיחו ש-x_n קבועה לבסוף.

<u>הוכחה.</u>

נוכיח שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x$.

מכיוון ש- $x \to x_n$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-

$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x, \frac{\varepsilon_0}{2})$.

מזה נובע שאם ניקח שני מספרים טבעיים $m, k \geq n_0$,

אז $d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x) + d(x, x_k) < \varepsilon_0$.

לו היה $x_m \neq x_k$ אז לפי התנאי

היה $d(x_m, x_k) \geq \varepsilon_0$. לכן לכל $m, k \geq n_0$ מתקיים $x_m = x_k$ ■

<u>ג'</u> תהי x_n סדרה במ"מ (M,d) המתכנסת ל-x. תהי $\{x_n\}$ קבוצה סופית . תוכיחו ש-x_n קבועה לבסוף.

<u>הוכחה.</u>

נסמן את הקבוצה $\{x_n\}$ ב- A. נסתכל בקבוצה

$K = \{a \in A | d(a,x) > 0\}$. אם $K = \emptyset$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$

$x_n = a$, והכול הוכח.

אם $K \neq \emptyset$ נסמן ב-ε את המספר $\min\limits_{a \in K} \{d(a,x)\}$.

אזי (מההתכנסות) קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-

$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x,\varepsilon)$. אזי

$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \notin K \Rightarrow d(x_n,x) = 0 \Rightarrow x_n = x$. מצ"ל.

<u>שאלה 2</u>

תהי x_n סדרת קושי במ"מ (M,d). תהי x_{n_i} תתסדרה שלה כך ש- $x_{n_i} \to a \in M$. תוכיחו שגם $x_n \to a$.

<u>הוכחה.</u> יהיה $\varepsilon > 0$.

לפי הגדרת סדרת קושי קיים k_0 : $m,n \geq k_0 \Rightarrow d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

לפי הגדרת גבול התתסדרה קיים i_0: $i \geq i_0 \Rightarrow d(x_{n_i},a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

יהיה $M \coloneqq \max\{i_0,k_0\}$. אזי:

$$(n \geq M \Rightarrow n \geq k_0) \wedge (n_M \geq n_{k_0} \geq k_0) \Rightarrow d(x_n,x_{n_M}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$M \geq i_0 \Rightarrow d(x_{n_M},a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

לכן: $n \geq M \Rightarrow d(x_n,a) \leq d(x_n,x_{n_M}) + d(x_{n_M},a) < \varepsilon$.

אז $x_n \to a$. ■

שאלה 3

הגדרה. תתקבוצה A של מ"מ (M,d) נקראת *חסומה* אם קיים כדור $B(x_0,R)$ כך ש- $A \subseteq B(x_0,R)$.

הגדרה. סדרה x_n במ"מ (M,d) נקראת *חסומה* אם קבוצת איבריה חסומה.

תוכיחו שסדרת קושי חסומה.

הוכחה.

תהי x_n סדרת קושי ויהיה $r>0$. לפי הדדרת סדרת קושי

קיים n_0 : $n \ge n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n_0}) < r$. נגדיר:

$R = \frac{1}{2} + \max\{r, d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}$.

אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x_n \in B(x_{n_0}, R)$. ■

שאלה 4

יהיה M מרחב מטרי .

א' יהיו $a \in M$ ו- $f: M \to \mathbb{R}$ - פונקציה כך שלכל $x \in M$: $f(x) = d(x,a)$. להוכיח ש-f פונקציה רציפה.

הוכחה. נוכיח ש-f רציפה בכל נקודה וזה לפי הגדרה (ההרצאה 2) יוכיח רציפות של הפונקציה.

נניח ש-$x \in M$ ו- $x_n \to x$. לפי קריטריון התכנסות הסדרות שהיה בהרצאה ותרגיל בית, זה גורר: $d(x_n, x) \to 0$. מאישיוויון המשולש נובע (ראה תרגיל בית 1) ש- $|d(x_n,a) - d(x,a)| \le d(x_n, x)$. אבל לפי תכונות הסדרות המתכנסות ב-$\mathbb{R}$ (הידועות מקורסים קודמים),זה אומר ש- $|d(x_n,a) - d(x,a)| \to 0$. ומזה נבעה ש-

$$d_E(f(x_n), f(x)) = |f(x_n) - f(x)| = |d(x_n,a) - d(x,a)| \to 0$$

כאשר d_E מטריקה רגילה (אוקלידית) ב-$\mathbb{R}$. לפי אותו קריטריון ההתכנסות קיבלנו: $f(x_n) \to f(x)$ במטריקה d_E. ז"א: $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. מזה נובעה (ההרצאה 2) ש-f רציפה בנקודה x. מצ"ל.

ב' יהיו $f, g: M \to \mathbb{R}^n$ פונקציות רציפות כאשר מטריקה ב-$\mathbb{R}^n$ אוקלידית.
להוכיח ש- $f + g$ פונקציה רציפה.

הוכחה.
המרחק בין שתי נקודות $a, b \in \mathbb{R}^n$ במטריקה אוקלידית אפשר לבטא בנורמה האוקלידית $\|a - b\|$, הידועה מקורסים קודמים: לכל ווקטור $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש-$v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$: $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$.
יהיו f, g רציפות ב נקודה כלשהי $a \in M$. נוכיח ש- $f + g$ גם רציפה ב- a.
יהיה $\varepsilon > 0$. אזי כיוון ש-f רציפה ב- a , קיים $\delta_1 > 0$ כך ש- $d(x, a) < \delta_1 \Leftarrow \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
g רציפה ב- a, לכן קיים $\delta_2 > 0$ כך ש- $d(x, a) < \delta_2 \Leftarrow \|g(x) - g(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. יהיה $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\}$.
אזי אם $d(x, a) < \delta$ נקבל לפי אישוויון המשולש:

$$\big\|\big(f(x) + g(x)\big) - \big(f(a) + g(a)\big)\big\| = \|f(x) - f(a) + g(x) - g(a)\| \leq \|f(x) - f(a)\| + \|g(x) - g(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

. אז $f + g$ רציפה ב- a. ■