יש כאן כמה נקודות על כמה נושאים,
לא על הכל.

אם זה עוזר לעוד מישהו אז שמחתי לעזור!

אם אתם מוצאים שכתבתי משהו לא נכון,
מוזמנים לפנות אליי.

לא ראיתי בסרטונים שום דבר על צמצום פונקציות, יכול להיות
שפספסתי, אבל בכל מקרה כדאי שתסתכלו על זה כנראה.

כאשר כתוב טענה, זו טענה ששייך פתר מסרטון.

בדידה

מחלקות שקילות

יהי R יח"ש על a יחס על R

$$[a]_R = \{ b \in A \mid (a,b) \in R \}$$

שנמצאים ביחס איתו.

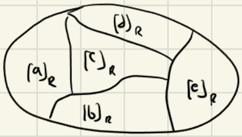
ששקולים אליו.

קבוצת המנה

תהי קבוצה A ויחס R על A כך ש R יח"ש

A/R = אוסף מחלקות השקילות = קבוצת המנה

בציור:



יחס סדר מלא

R יחס סדר מלא אם לכל שני איברים $(a,b) \in A$ מתקיים כי

$(a,b) \in R$ או $(b,a) \in R$

הסבר בשפת הקודש: אפשר להשוות בין כל שני איברים ב-A

ביחסי סדר כאשר אנחנו אומרים a גדול מ-b אנחנו מתכוונים
לכך שהאיבר a מצד הימני של bRa

(ימין חזק 💪 שמאל חלש :( ) ניתן תמיד לחשוב על זה כך: $b \le a$

יהי R יחס סדר חלקי על A

מינימלי

איבר $a\in A$ נקרא מינימלי אם לא קיים איבר קטן ממנו

$$\forall b\in A: (b,a)\in R \rightarrow b=a$$

מקסימלי

איבר $a\in A$ נקרא <u>מקסימלי</u>

$$\forall b\in A: (a,b)\in R \rightarrow b=a$$

לא קיים איבר שגדול ממנו.

מינימום / הקטן ביותר

איבר $a\in A$ נקרא מינימום אם

$$\forall b\in A: (a,b)\in R$$

מינימום זה איבר שאפשר <u>להשוות</u> עם כולם והוא <u>הקטן</u> מכולם

מקסימום / האיבר הגדול ביותר

איבר $a\in A$ נקרא מקסימום אם

$$\forall b\in A: (b,a)\in R$$

ניתן <u>להשוות</u> עם כולם והוא <u>הגדול</u> מכולם

יהי R יחס סדר חלקי על A. A קבוצה סדורה חלקית.
תהי $B \subseteq A$

חסם מלעיל

$a \in A$ נקרא חסם מלעיל של B אם $\forall b \in B \ (b,a)$

ניתן להשוות עם כל האיברים בB והוא מימינם

חסם מלרע

איבר $a \in A$ נקרא חסם מלרע של B אם $\forall b \in B \ (a,b)$

ניתן להשוות עם כל האיברים בB ו a נמצא משמאל.

חסם עליון

מינימום מחסמי המלעיל

חסם תחתון

מקסימום מחסמי מלרע

$$f: A \longrightarrow B$$

תחום   טווח

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(a)=b \iff (a,b)\in f$$

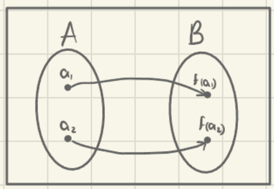
שלמה

f נקראת פונקציה שלמה אם לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ כך ש $(a,b)\in f$ $f(a)=b$

חח"ע

f נקראת חח"ע אם לכל זוג איברים

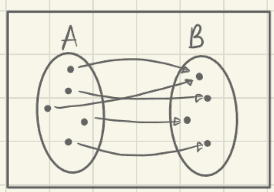
$$\forall x_1,x_2\in A : f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow x_1=x_2$$



על

f נקראת על B אם לכל איבר ב B יש מקור

$$\forall b\in B\ \exists a\in A : f(a)=b$$



פונקציה מוגדרת היטב

1. לכל $x\in A$, $f(x)$ מוגדר
2. לכל $x\in A$, $f(x)\in B$
3. לא ייתכן ש x מצביע על שני איברים ב B

תמונה

תהי $f:A\to B$ ותהי $X\subseteq A$. התמונה של X הינה

$$f[X] = \{ f(x) \mid x\in X\}$$

התמונה ההפוכה

תהי $f:A\to B$ ותהי $Y\subseteq B$ התמונה ההפיכה היא אוסף
המקורות של איברים מ Y

$$f^{-1}[Y] = \{a\in A \mid f(a)\in Y\}$$

הרכבה

תהי $f: A\to B$ ותהי $g: B\to C$ אזי

$$g\circ f : A\to C$$

המוגדרת ע"י

$$g\circ f(a) = g(f(a))$$

פונקציית הזהות

תהי קבוצה A ונגדיר את פונקציית הזהות על A

$$I_A : A \to A \qquad I_A(a) = a$$

הפיכה

תהי $f: A \to B$ כך שקיימת פונקציה
$g: B \to A$ המקיימת

$$g \circ f = I_A \qquad f \circ g$$

f נקראת הפיכה ו-g נקראת ההופכית שלה ומסמנים
$f^{-1} = g$

עוצמות

עוצמות שוות

$A\sim B$, $|A|=|B|$ אם קיימת פונקציה הפיכה $f: A\to B$

$|A|\leq|B|$

תהיינה A,B , $|A|\leq|B|$ אם קיימת $f: A\to B$ חח"ע

סדרה

סדרת איברים מ A היא פונקציה $a: \mathbb{N}\to A$
מקבוצת הטבעיים לקבוצת האיברים

$\aleph_0$

$\aleph_0=|\mathbb{Q}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}|$

$\aleph$

$|\mathbb{R}|=\aleph\neq\aleph_0$

משפט קנטור

העוצמה של קבוצה קטנה ואינה שווה לעוצמת קבוצת תתי הקבוצות שלה.

$$|A| < |P(A)|$$

בת - מנייה

קבוצה A נקראת בת מניה אם $|A| \leq |\mathbb{N}|$

אפשר למנות אותה. אפשר לסדר אותם.

טענה

כל תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{N}$ היא $\aleph_0$

ניתן להסיק שכל קבוצה בת מניה אינסופית היא מהעוצמה $\aleph_0$

טענה

תהיינה A,B,C,D $A \cap B = \emptyset$ $C \cap D = \emptyset$ $A \sim C$ $B \sim D$

$A \cup B \sim C \cup D$

חיבור עוצמות

תהיינה עוצמות a,b נגדיר את $a+b = |A \cup B|$

כאשר A,B נציגות זרות של a,b

טענה

תהיינה A,B,C,D $A\cap B=\emptyset$ $C\cap D=\emptyset$ $A\sim C$ $B\sim D$

$$A\times B \sim C\times D$$

כפל עוצמות

תהיינה עוצמות a,b

$$a\cdot b = |A\times B|$$

כאשר A,B נציגות של העוצמות a,b

הגדרה

מהמעריך לבסיס

$$A^B = \{\text{אוסף הפונקציות מ-}B\text{ ל-}A\}$$

טענה

תהיינה A,B,C,D $A\sim C$ $B\sim D$ אזי

$$A^B \sim C^D$$

חזקת עוצמות

תהיינה עוצמות a,b אזי

$$a^b = |A^B|$$

חוקי חזקות לעוצמות

תהיינה עוצמות a,b,c

1. $a^b \cdot a^c = a^{(b+c)}$
2. $(a^b)^c = a^{b\cdot c}$
3. $a^b \cdot c^b = (a\cdot c)^b$

פונקציות מציינות

תהי A קבוצה ותהי $D\subseteq A$ נגדיר את הפונקציה המציינת

$$I_D: A \to \{0,1\}$$

הפונקציה המציינת מספרת לנו
מי הם האיברים מתוך הקבוצה D
ומי הם האיברים שלא מתוך קבוצה D

$$I_D(x) = \begin{cases} 1 & x\in D \\ 0 & x\notin D \end{cases}$$

$2^{\aleph_0} = \aleph$

$|P(A)| > |A|$

$|A| < 2^{|A|}$

$|P(A)| = 2^{|A|}$

* $a\cdot b = \max(a,b)$

* $a+b = \max(a,b)$

* נכון אם אחת הקבוצות אינסופית

טענה

תהיינה קבוצות A,B כך ש $|A|\leq|B|$ אזי קיימת $X\subseteq B$ כך ש $X\sim A$

חשבון עוצמות

תהיינה עוצמות $a\leq c$, $b\leq d$ אזי $a+b\leq c+d$

תהיינה עוצמות $a\leq c$, $b\leq d$ אזי $a\cdot b\leq c\cdot d$

תהיינה עוצמות $a\leq c\neq 0$, $b\leq d$ אזי $a^b\leq c^d$

למת נקודת שבת

תהי $h: P(A)\to P(A)$ אם $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow h(X_1)\subseteq h(X_2)$

אזי קיימת $K\subseteq A$ $h(K)=K$

משפט קנטור - שרדר - ברנשטיין

אם $|A|\le|B|$, $|B|\le|A|$ אזי $|A|=|B|$

$\aleph = |\mathbb{R}| = |(-1,1)|$

$\aleph = |(-1,1)| = |(a,b)|$ לכל $a<b$ מספרים סופיים כלשהם

$\aleph = |[a,b)|$ כי $|(a,b)| \le |[a,b)| \le |\mathbb{R}|$ $\aleph \le |[a,b)| \le \aleph$ וק.ש.ב

$\aleph = |(a,\infty)|$ כי $|(a,a+1)| \le |(a,\infty)| \le |\mathbb{R}|$ $\aleph \le |(a,\infty)| \le \aleph$ וק.ש.ב

טענה

תהי S קבוצה של קבוצות כך ש $|S| \le \aleph_0$

ויהא לכל $X \in S$, $|X| \le \aleph_0$ אזי

$$\left|\bigcup_{X\in S} X\right| \le \aleph_0$$

אקסיומת הבחירה

תהי S קבוצת קבוצות לא ריקות ונגדיר

האוסף הוא איחוד של האיברים מכל הקבוצות. $U = \bigcup_{X\in S} X$

אזי קיימת פונקציית בחירה $f: S \to U$

כך ש $f(x) \in X$

טענה

תהיינה $A,B \neq \emptyset$ אזי קיימת $f: A \to B$ חח"ע

אמ"מ קיימת $g: B \to A$ על

שרשרת

תהי קבוצה X עם יחס סדר חלקי $\leq$

ותת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת שרשרת

אם לכל $a_1, a_2 \in A$ $a_1 \leq a_2$ או $a_2 \leq a_1$

קטן שווה מהלך את הכלב

במילים רגילות: אפשר להשוות בין כל שני איברים בשרשרת

שרשרת מקסימלית

שרשרת שאינה מוכלת בשרשרת אחרת

עקרון המקסימום של האוסדורף

תהי X קבוצה עם יחס סדר חלקי ותהי S שרשרת $S \subseteq X$

אזי S מוכלת בשרשרת מקסימלית ב X

עוד קצת על אקסיומת הבחירה

אקסיומת הבחירה. תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות לא ריקות. אזי קיימת פונקציה $f:\{A_i\}_{i\in I}\to\bigcup_{i\in I}A_i$ המקיימת $\forall i\in I: f(A_i)\in A_i$. במילים פשוטות: ניתן לבנות פונקציה הבוחרת נציג מכל קבוצה.

תחת אקסיומות ZF (רשימת של אקסיומות "סטנדרטיות", לא משנה אם שמעתם עליהם או לא), הדברים הבאים שקולים לאקסיומת הבחירה:

- **הלמה של צורן.**: תהי A קבוצה סדורה חלקית **לא ריקה** כך שלכל שרשרת המוכלת בA קיים חסם מלעיל מA. אזי קיים בA איבר מקסימלי (איבר שאין איבר שונה ממנו הגדול ממנו).
- **עקרון המקסימום של האוסדורף**: כל שרשרת מוכלת בשרשרת מקסימלית (שרשרת מקסימאלית = שרשרת שלא מוכלת ממש באף שרשרת אחרת. לחילופין, כל איבר שנוסיף לשרשרת תגרום לה לא להיות שרשרת)

דברים על עוצמות ונזה

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

לדוגמה |זוגיים| + |אי זוגיים| = |טבעיים|

תת הקבוצות אינסופיות של הטבעיים והן זרות

$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חחע $\quad f(n,k) = 2^n \cdot 3^k$ לכן $\aleph_0 \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ חחע $\quad f(n) = (n,1)$ לכן $\aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0$

ולפי קשב סיימנו.

$$2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph}$$

$$\aleph = 2^{\aleph_0} < \aleph_0^{\aleph_0} < \aleph^{\aleph_0} = \aleph \overset{\text{ק.ש.ב}}{\Longrightarrow} \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$$

$$2^{\aleph} < \aleph_0^{\aleph} < \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph} \overset{\text{ק.ש.ב}}{\Longrightarrow} \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph}$$

באדיבות מכנס

משפט

תהי $f: A \to B$ ותהיינה $X \subseteq A$ $Y \subseteq B$ אזי

1. $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$ כל המקורות של התמונה של X יהיה מוכל מX
2. $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$ התמונה של המקורות של Y מכילה את Y
3. אם f חח"ע $X = f^{-1}[f[X]]$
4. אם f על $Y = f[f^{-1}[Y]]$

משפט

תהיינה $f: A \to B$, $g: B \to C$ אזי

1. אם $g \circ f$ חח"ע אז f חח"ע
2. אם $g \circ f$ על אז g על

משפט

אם f הפיכה אזי קיימת לה הופכית יחידה.

משפט

f הפיכה $\Longleftrightarrow$ f חח"ע ועל

משפט

תהיינה $f:A\to B$, $g:B\to C$

אם f,g חח"ע אם $g\circ f$ חחע

אם f,g על אם $g\circ f$ ע

כלל (נראה לי)

$f:A\to B$ על אמ"מ $f[A]=B$

כלל

$y\in f[X] \Leftrightarrow \exists_{a\in X}: f(a)=y$

כלל

$x\in f^{-1}[Y] \Leftrightarrow f(x)\in Y$ איבר הוא תמונה של Y אם המקור שלו הוא מ Y

מסקנה

אם ניתן לסדר את איברי A בסדרה כך שכל איבר יופיע בדיוק פעם אחת אזי $A\sim\mathbb{N}$

דוגמאות

קבוצת מנה-

$P(A) \qquad A=\{1,2,3\}$

יחס R על $P(A)$

$(B,C)\in R$

$B\cap\{1,2\} = C\cap\{1,2\}$

אילו חיתוכים אפשריים לקבוצה $\{1,2\}$?

$\{1,2\},\{2\},\{1\},\emptyset$

ומה הן מחלקות השקילות?

$[\emptyset]_R = \{\emptyset,\{3\}\}$

$[\{1\}]_R = \{\{3,1\},\{1\}\}$

$[\{2\}]_R = \{\{2,3\},\{2\}\}$

$[\{1,2\}]_R = \{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$

$$P(A)/R = \left\{ \{\emptyset,\{3\}\},\ \{\{3,1\},\{1\}\},\ \{\{2,3\},\{2\}\},\ \{\{1,2\},\{1,2,3\}\} \right\}$$

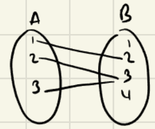
יחס סדר חלקי לא מלא, לדוגמה "מחלק את" מעל הטבעיים

2 לא מחלק את 3

3 לא מחלק את 2

עוד דוגמאות

תמונה של פונקציה



$f[\{1,2\}] = \{f(1), f(2)\} = \{2,3\}$

$f[\emptyset] = \emptyset$

$f[\{2,3\}] = \{3\}$

התמונה ההפוכה

$f^{-1}[\emptyset] = f^{-1}[\{1\}] = f^{-1}[\{1,4\}] = \emptyset$

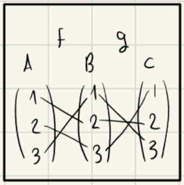
$f^{-1}[\{2\}] = \{1\}$

$f^{-1}[\{3\}] = \{2,3\}$

$f^{-1}[\{B\}] = A$ מכיוון שהפונקציה שלימה

הרכבת פונקציות

באיור



$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(2) = 2$

$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(3) = 1$

דוגמאות חשובות (לדעתי)

יהי אוסף קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ עם יחס ההכלה בין הקבוצות אזי

$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha =$ חסם עליון של האוסף

$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha =$ חסם תחתון של האוסף

נסו להוכיח :) במידה ולא הצלחתם - דקה 37 בסרטון של איברים מינימלי- ומקסימליים

זרות!

$\aleph_0 + \aleph_0 = |$ זוגיים $\cup$ אי-זוגיים $| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

$0 \cdot a = |\emptyset \times A| = |\emptyset| = 0$

$\emptyset^{\emptyset} = 0^0 = 1$

$0^A = \emptyset^A = \{\emptyset\} = 0$

טיפים ודגשים

- נניח אומרים לנו להוכיח שהאיחוד הכללי נניח הוא $\bigcup_{i\in I}^{n} A = \mathbb{N}$
  אפשר לעשות הכלה דו כיוונית

- אם קצת מסתבכים בפונקציות אפשר להביא דוגמה, וככה לראות איך הפונקציה "נראית"

- לא תמיד אם $g\circ f = I_A$ זה אומר ש $f\circ g = I_B$

- פונקציית הזהות היא חח"ע ועל

- אם $f\circ g = I_B$, I_B על אזי f על

- אם $g\circ f = I_A$ I_A חח"ע $\Rightarrow$ f חח"ע

- איך מוכיחים ששתי פונקציות שוות? $f_1, f_2 \in A^B$ צ"ל שלכל איבר ב C
  $f_2(C) = f_1(C)$