שאלון סגור

בס"ד
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מספר הקורס : 83-115-01
מרצה : דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'
מתרגלים : זהבית צבי, רואי אסרף
סמסטר ב', מועד ב' : כ"ז אב, התשע"ו (31.08.2016)
<u>משך הבחינה : שלוש שעות</u>

שאלה 1. (20 נקודות)

א. פתרו את המשוואה $\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)dx+\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}\right)dy=0$;

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)dx+\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}\right)dy=0 \ /:x \ \ (x\neq 0,\ x\geq y,\ x\geq -y)$$

$$\left(\sqrt{1+\frac{y}{x}}+\sqrt{1-\frac{y}{x}}\right)dx+\left(\sqrt{1-\frac{y}{x}}-\sqrt{1+\frac{y}{x}}\right)dy=0$$

$$y=tx,\ dy=xdt+tdx$$

$$\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\right)dx+\left(\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}\right)\left(xdt+tdx\right)=0 \ \ /*\left(\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}\right)$$

$$\left(-2t\right)dx+\left(2-2\sqrt{1-t^2}\right)\left(xdt+tdx\right)=0$$

$$\left(-2\sqrt{1-t^2}\right)dx+2x\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)dt=0$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt \ / \ t\neq 0 \Rightarrow \ y\neq 0$$

$$\ln|x|=\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt-t+C$$

$$\ln|x|=\arcsin t-t+C$$

$$\ln|x|=\arcsin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}+C$$

$$check:\ y=0\Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}_{=2\sqrt{x}}+\underbrace{\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}\right)}_{=0}y'=0\Rightarrow not\ a\ solution$$

ב. פתרו את המשוואה $(x-2\sin y+3)dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$. (רמז:
השתמשו בהצבה $\sin y=z$).

$$(x-2\sin y+3)dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$$
$$z=\sin y \ \Rightarrow\ dz=\cos y dy$$
$$(x-2z+3)dx+(2x-4z-3)dz=0$$
$$t=x-2z \Rightarrow\ dt=-2dz$$
$$(t+3)dx-0.5(2t-3)dt=0$$
$$\frac{t-1.5}{t+3}dt=dx$$
$$\int\left(1-\frac{4.5}{t+3}\right)dt=x+C$$
$$t-4.5\ln|t+3|=x+C$$
$$x-2z-4.5\ln|x-2z+3|=x+C$$
$$-2\sin y-4.5\ln|x-2\sin y+3|=C$$
$$\sin y+2.25\ln|x-2\sin y+3|=C$$

שאלה 2 . (20 נקודות)

א. שחזרו את המשוואה הדיפרנציאלית שהפתרון שלה הוא

$y=C_1e^{-4x}+C_2\sin x+C_3\cos x$;

This is the solution of linear homogeneous eq of order 3

$$y=C_1e^{-4x}+C_2\sin x+C_3\cos x \Rightarrow \lambda=-4,\pm i$$
$$\Rightarrow(\lambda+4)(\lambda^2+1)=\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+4=0 \Rightarrow\ y'''+4y''+y'+4y=0$$

ב. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית שאגף שמאל שלה נתון ע"י המשוואה מסעיף א' ואגף ימין שלה הוא $\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{4x}$.

אגף ימין לא חופף עם אגף שמאל, לכן נחפש פתרון פרטי בצורה

$$y_p=(Ax+B)e^{4x}$$
$$y_p'=Ae^{4x}+4(Ax+B)e^{4x}$$
$$y_p''=8Ae^{4x}+16(Ax+B)e^{4x}$$
$$y_p'''=48Ae^{4x}+64(Ax+B)e^{4x}$$
$$e^{4x}\left[48A+64(Ax+B)+32A+64(Ax+B)+A+4(Ax+B)+4(Ax+B)\right]=\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{4x}$$

$$x:\ \ 136A=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \ A=\frac{1}{544}$$

$$x^0:\ 81A+136B=-\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ \ B=\frac{-\frac{1}{8}-\frac{81}{544}}{136}=-\frac{149}{136\cdot 544}=-\frac{149}{73984};$$

$$y=C_1e^{-4x}+C_2\sin x+C_3\cos x+\left(\frac{1}{544}x-\frac{149}{73984}\right)e^{4x}$$

שאלה 3 . (20 נקודות)

א. למשוואה דיפרנציאלית $(2x+1)y''-4(x+1)y'+4y=0$ יש פתרון מהצורה $y(x)=e^{nx}$. מצאו את n ואת הפתרון הכללי של המשוואה ;

$$(2x+1)y''-4(x+1)y'+4y=0$$

$$y(x)=e^{nx},\ y'=ne^{nx},\ y''=n^2e^{nx}$$

$$(2x+1)n^2e^{nx}-4(x+1)ne^{nx}+4e^{nx}=0$$

$$(2x+1)n^2-4(x+1)n+4=0$$

$$x\underbrace{\left(2n^2-4n\right)}_{=0\ for\ n=0,2}+\underbrace{\left(n^2-4n+4\right)}_{=0\ for\ n=2}=0$$

$$\Rightarrow n=2$$

נחפש פתרון שני ע"י הורדת סדר :

$$y=ve^{2x}$$

$$(2x+1)\left(v''e^{2x}+4v'e^{2x}+4ve^{2x}\right)-4(x+1)\left(v'e^{2x}+2ve^{2x}\right)+4ve^{2x}=0\ /:e^{2x}$$

$$(2x+1)v''+4xv'=0$$

$$z=v':\ (2x+1)z'+4xz=0\ \Rightarrow\ \frac{dz}{z}=-\frac{4x}{2x+1}dx$$

$$\ln|z|=-2\int\frac{2x+1-1}{2x+1}dx+C=-2\left(x-0.5\ln|2x+1|\right)+C$$

$$\ln|z|=-2x+\ln|2x+1|+C$$

$$z=Ce^{-2x}(2x+1)\Rightarrow\ v=\int e^{-2x}(2x+1)dx=\begin{bmatrix}u=2x+1,dw=e^{-2x}dx\\ du=2dx,\ w=-0.5e^{-2x}\end{bmatrix}$$

$$=-0.5e^{-2x}(2x+1)+\int e^{-2x}dx=e^{-2x}(-x-1)+C\Rightarrow\ y=-x-1;$$

$$y=C_1e^{2x}+C_2(x+1)$$

ב. פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית $\left(x+2\right)^2 y''-\left(x+2\right)y'-3y=0$. כתבו את הפתרון הכללי ומצאו פתרון פרטי עבור תנאי התחלה $y(0)=1,\ y'(0)=-1$.

$$\left(x+2\right)^2 y''-\left(x+2\right)y'-3y=0$$

$$z=x+2;\ dz=dx$$

$$z^2y''-zy'-3y=0$$

$$y=z^r,\ y'=rz^{r-1},\ y''=r(r-1)z^{r-2}$$

$$r(r-1)-r-3=0$$

$$r^2-2r-3=0$$

$$\left(r-3\right)\left(r+1\right)=0$$

$$r_{1,2}=3,-1$$

$$y_1=z^3=\left(x+2\right)^3,\ y_2=z^{-1}=\frac{1}{x+2}$$

$$y=C_1\left(x+2\right)^3+C_2\frac{1}{x+2}$$

$$private\ solution:\ y'=3C_1(x+2)^2-\frac{C_2}{\left(x+2\right)^2}$$

$$y(0)=8C_1+0.5C_2=1$$

$$y'(0)=12C_1-0.25C_2=-1$$

$$C_1=\text{-}0.03125,\ C_2=2.5$$

$$y=\text{-}0.03125\cdot\left(x+2\right)^3+2.5\frac{1}{x+2}$$

שאלה 4. (20 נקודות)

בהינתן המשוואה

$$y'=\frac{2x-y}{1-x}$$

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה בעזרת טור סביב $x=0$;

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$$

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}=2x-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-2x+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n+c_0-2x=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n+c_0-2x+c_1=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)c_{n+1}-nc_n+c_n\right]x^n+c_0-2x+c_1=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)c_{n+1}-nc_n+c_n\right]x^n+c_0-2x+c_1+(2c_2-c_1+c_1)x=0$$

$$c_0+c_1=0$$
$$2c_2-2=0$$
$$(n+1)c_{n+1}-nc_n+c_n=0,\ \ n\ge 2$$

$$c_0=-c_1$$
$$c_2=1$$
$$c_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}c_n,\ \ n\ge 2\ \Rightarrow\ c_3=\frac{1}{3}c_2=\frac{1}{3},\ c_4=\frac{1}{2}c_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},\ c_5=\frac{3}{5}c_4=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}$$
$$,\ \ c_6=\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$$

$$y=c_0-c_0x+\left(x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{15}x^6+\ldots\right)$$

$$y=c_0(1-x)+\left(x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{15}x^6+\ldots\right)$$

ב. (4 נקודות) מצאו פתרון של המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=a$ בהתבסס על סעיף א' ;

$$y(0)=c_0=\alpha$$

$$y=\alpha(1-x)+\left(x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{15}x^6+\ldots\right)$$

ג.   מצאו את הפתרון של המשוואה הנתונה בדרך אחרת .

$$y' = \frac{2x-y}{1-x}$$

$$y' + \frac{1}{1-x}y = \frac{2x}{1-x} \ (linear \ eq)$$

$$y' + \frac{1}{1-x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{1-x}dx \Rightarrow \ln y = \ln|x-1| + \ln C \Rightarrow y = C(x-1)$$

$$C'(x-1) + C + \frac{1}{1-x}C(x-1) = \frac{2x}{1-x}$$

$$C' = -\frac{2x}{(x-1)^2} \Rightarrow C = -2\int \frac{x-1+1}{(x-1)^2}dx = -2\ln|x-1| + 2\cdot\frac{1}{x-1} + K$$

$$y = \left(-2\ln|x-1| + 2\cdot\frac{1}{x-1} + K\right)(x-1) = -2(x-1)\ln|x-1| + 2 + K(x-1)$$

$$y = K(x-1) + 2\left(1-(x-1)\ln|x-1|\right)$$

שאלה 5 . (20 נקודות)

א. פתרו את מערכת המשוואות הנתונה :

$$\begin{cases} 2x'(t) + y'(t) - 4x(t) - y(t) = e^t \\ x'(t) + 3x(t) + y(t) = 0 \end{cases}$$

נוסחאות עזר :

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C, \ \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

$$\begin{cases} 2x'(t)+y'(t)-4x(t)-y(t)=e^t \\ \quad x'(t)+3x(t)+y(t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x(t)-3y(t)+y'(t)-4x(t)=e^t \\ \quad x'(t)+3x(t)+y(t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t)=10x(t)+3y(t)+e^t \\ \quad x'(t)=-3x(t)-y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-a & 10 \\ -1 & -3-a \end{vmatrix} = -\left(9-a^2\right)+10 = a^2+1=0 \Rightarrow \; a=\pm i$$

$$\begin{pmatrix} 3-i & 10 \\ -1 & -3-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \; -u-v(3+i)=0 \Rightarrow \; v=3-i, u=-(9+1)=-10$$

$$\bar{x} = e^{it}\begin{pmatrix} -10 \\ 3-i \end{pmatrix} = (\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} -10 \\ 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\cos t - 10i\sin t \\ 3\cos t + \sin t + i(3\sin t - \cos t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -10\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}, \; \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -10\sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -10\cos t & -10\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix},$$

$$X^1 = \frac{1}{-30\cos t\sin t + 10\cos^2 t + 30\sin t\cos t + 10\sin^2 t}\begin{pmatrix} 3\sin t - \cos t & 10\sin t \\ -3\cos t - \sin t & -10\cos t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3\sin t - \cos t & 10\sin t \\ -3\cos t - \sin t & -10\cos t \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_p = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -10\cos t & -10\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}\int\begin{pmatrix} 3\sin t - \cos t & 10\sin t \\ -3\cos t - \sin t & -10\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}dt$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -10\cos t & -10\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}\int\begin{pmatrix} 3e^t\sin t - e^t\cos t \\ -3e^t\cos t - e^t\sin t \end{pmatrix}dt$$

$$= \frac{1}{10}e^t\begin{pmatrix} -10\cos t & -10\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.5(\sin t - \cos t) - 0.5(\cos t + \sin t) \\ -1.5(\cos t + \sin t) - 0.5(\sin t - \cos t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}e^t\begin{pmatrix} -10\cos t & -10\sin t \\ 3\cos t + \sin t & 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin t - 2\cos t \\ -2\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}e^t\begin{pmatrix} -10\cos t\sin t + 20\cos^2 t + 20\sin^2 t + 10\sin t\cos t \\ 3\cos t\sin t + \sin^2 t - 6\cos^2 t - 2\sin t\cos t - 6\sin^2 t + 2\cos t\sin t - 3\sin t\cos t + \cos^2 t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}e^t\begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -10\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -10\sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

ב. (5 נקודות) כתבו את המשוואה הבא בעזרת מערכת משוואות מסדר ראשון (אין לפתור את המערכת המתקבלת) : $y''' - y'' + xy' - y = x^2$

$$x_1 = y,\ x_2 = y' = x_1',\ x_3 = y'' = x_2',\ x_3' - x_3 + x \cdot x_2 - x_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1'(x) = x_2(x) \\ x_2'(x) = x_3(x) \\ x_3'(x) = x_3(x) - x \cdot x_2(x) + x_1(x) \end{cases}$$

שאלה 6. (20 נקודות)

א. (5 נקודות) מצאו את הפתרון של בעיית התחלה בקטע $[2,\infty)$ בעזרת התמרת לפלס

$$y'' - 2y' + y = \delta(t)$$
$$y(0) = y'(0) = 0$$

בקטע נתון פונקציה דלטא מקבלת ערך 0, ולפי משפט, המשוואה הליניארית ההומוגנית עם תנאי התחלה ב-0 בעלת תרון יחיד והוא טריוויאלי y=0 .

הערה : פתרון לא יעיל יזכה רק בחצי מהנקודות.

ב. פתרו את בעיית התחלה הבאה בעזרת התמרת לפלס :

$$\begin{cases} y'' + 9y = t + u(t-3)e^t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\left(s^2+9\right)F(s) - s - 1 = \frac{1}{s^2} + e^{-3(s-1)}\frac{1}{s-1}$$

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+9} + \frac{1}{\left(s^2+9\right)s^2} + e^{-3(s-1)}\frac{1}{(s-1)\left(s^2+9\right)}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+9}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}=\cos(3t)+\frac{1}{3}\sin(3t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+9\right)s^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{9}}{s^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{9}}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{9}t-\frac{1}{27}\sin(3t)$$

$$\frac{1}{\left(s^2+9\right)s^2}=\frac{as+b}{s^2+9}+\frac{c}{s^2}+\frac{d}{s}$$

$$(as+b)s^2+c\left(s^2+9\right)+ds\left(s^2+9\right)=1$$

$$a+d=0 \;\Rightarrow\; a=0$$

$$b+c=0 \;\Rightarrow b=-\frac{1}{9}$$

$$9d=0 \;\Rightarrow\; d=0$$

$$9c=1 \;\Rightarrow\; c=\frac{1}{9}$$

$$L^{-1}\left\{e^{-3(s-1)}\frac{1}{(s-1)\left(s^2+9\right)}\right\}=e^3u_3(t)\left[-\frac{1}{10}\cos 3(t-3)-\frac{1}{30}\sin 3(t-3)+\frac{1}{10}e^{t-3}\right]$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)\left(s^2+9\right)}\right\}=-\frac{1}{10}L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+9}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{10}}{s-1}\right\}=-\frac{1}{10}\cos 3t-\frac{1}{30}\sin 3t+\frac{1}{10}e^t$$

$$\frac{1}{(s-1)\left(s^2+9\right)}=\frac{as+b}{s^2+9}+\frac{d}{s-1}$$

$$d\left(s^2+9\right)+(as+b)(s-1)=1$$

$$\begin{cases}d+a=0\\ b-a=0\\ 9d-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d+a=0\\ a=b\\ 9d-a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=0.1\\ b=-0.1\\ a=-0.1\end{cases}$$

$$y(t)=\cos(3t)+\frac{8}{27}\sin(3t)+\frac{1}{9}t+e^3u_3(t)\left[-\frac{1}{10}\cos 3(t-3)-\frac{1}{30}\sin 3(t-3)+\frac{1}{10}e^{t-3}\right]$$

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	t^p , $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
11.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	12.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
13.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	14.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
15.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	16.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
17.	$u_c(t)=u(t-c)$	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	18.	$\delta(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}$
19	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	20.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
21.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	22.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
23.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	24.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
25.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	26.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
27	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			