תוספת להרצאה הראשונה בנושא מכפלות פנימיות

בועז צבאן

13 בדצמבר 2011

ניתן הוכחה פחות טכנית מזו שניתנה בהרצאה, למשפט הבא. ההוכחה משתמשת בכך שהעתקות לינאריות שמתלכדות על בסיס הן זהות, כלומר:

אם $R, T : V \to W$ העתקות לינאריות ו B בסיס כך ש $R(v) = T(v)$ לכל $v \in B$, אז $R = T$, כלומר לכל $v \in V$ מתקיים $R(v) = T(v)$.

אם לא הוכחתם למה זאת בקורס הקודם, עשו זאת כעת. ההוכחה קלה, על ידי הצגת כל וקטור $v \in V$ כצירוף לינארי של אברי B והפעלת הנתון.

בכתה, הוכחנו את הטענה הבאה.

למה 0.1 מכפלה פנימית היא כמו־לינארית ברכיב השני, כלומר: $\langle u, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v_1 \rangle + \bar{\beta} \langle u, v_2 \rangle$ (לכל $u, v_1, v_2 \in V$ וסקלרים α, β), ובאינדוקציה לצירוף לינארי מכל אורך.

באופן זהה (בדוק!) להוכחת הלמה שהעתקות לינאריות שמתלכדות על בסיס הן זהות, אפשר להוכיח את הטענה הבאה.

למה 0.2 העתקות כמו־לינאריות שמתלכדות על בסיס, הן זהות.

נזכור גם את התכונה הפשוטה הבאה: לכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ולכל $i, j = 1, \dots, n$, מתקיים $e_i^t A e_j = a_{ij}$. (מי שלא ראה זאת קודם, מוזמן לבדוק!)

משפט 0.3 יהי V מרחב מכפלה פנימית. לכל בסיס B של V, מתקיים: $\langle u, v \rangle = [u]_B^t \, G_B \overline{[v]_B}$ (לכל $u, v \in V$).

הוכחה: יהי $v \in V$. כל אחת מהפונקציות הבאות היא העתקה לינארית מ V ל $\mathbb{F}$:

$$u \mapsto \langle u, v \rangle$$
$$u \mapsto [u]_B^t \, G_B \overline{[v]_B}$$

(הראשונה – משום שמכפלה פנימית היא לינארית ברכיב הראשון, והשניה – משום שזו הרכבה של ההעתקות הלינאריות הבאות: הצגה לפי בסיס, שיחלוף, וכפל בוקטור עמודה קבוע.)

עלינו להוכיח שפונקציות אלה זהות, וכיון שהן לינאריות, מספיק להראות שהן מתלכדות על הבסיס B. נסמן $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. נקבע $i = 1, \dots, n$. יש להוכיח ש

$$\langle v_i, v \rangle = [v_i]_B^t \, G_B \overline{[v]_B}$$

לכל v. נשים לב שכבר הרווחנו משהו: $[v_i]_B = e_i$, לכן אגף ימין פשוט יותר ממה שהיה במקור. לסיכום, עלינו להראות שהפונקציות

$$v \mapsto \langle v_i, v \rangle$$
$$v \mapsto {e_i}^t G_B \overline{[v]_B}$$

זהות. נשים לב ששתיהן כמו־לינאריות. (הראשונה – מכך שמכפלה פנימית היא כמו־לינארית ברכיב השני, והשניה – מתכונות הצמוד המרוכב.)

לכן, מספיק לבדוק שהפונקציות מתלכדות על הבסיס B. יהי איפוא $j = 1, \dots, n$. עלינו להראות ש

$$\langle v_i, v_j \rangle = e_i^t G_B \overline{[v_j]_B} \, ,$$

כלומר

$$\langle v_i, v_j \rangle = e_i^t G_B e_j \, .$$

באגף ימין מופיע רכיב (i, j) של המטריצה G_B, וזה בהגדרתו שווה ל $\langle v_i, v_j \rangle$. ■

ננצל את ההזדמנות לציין כמה מסקנות מיידיות.

מסקנה 0.4 יהי V מרחב וקטורי ונקבע בסיס B שלו. יהיו נתונות שתי מכפלות פנימיות על V. אם מטריצת גראם לפי המכפלה הפנימית הראשונה שווה למטריצת גראם לפי המכפלה הפנימית השניה, אז המכפלות הפנימיות זהות.