שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית מספר 7

תאריך הגשה: 30.05.2012

שאלה 1

א. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה בת מניה. הוכיחו ש- $\operatorname{int}(A) = \varnothing$.

ב. מצאו: $\operatorname{int}(\mathbb{Q}), cl(\mathbb{Q})$ (ב- $\mathbb{R}$)

ג. הוכיחו ש- $A := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^n$ ו- $\operatorname{int}(A) = \varnothing$

שאלה 2

תהיינה ${}^{2}{}_{1}, {}^{2}{}_{2}$ טופולוגיות על X כך ש- ${}^{2}{}_{1} \subseteq {}^{2}{}_{2}$. הוכיחו:

א. F סגורה ב- $(X, {}^{2}{}_{1})$ $\Leftarrow$ F סגורה ב- $(X, {}^{2}{}_{2})$.

נסמן ב- $\operatorname{int}_{{}^{2}{}_{i}}(A)$ את הפנים של A במרחב $(X, {}^{2}{}_{i})$ (כנ"ל עבור $cl_{{}^{2}{}_{i}}(A)$).

ב. הוכיחו או הפריכו: $\operatorname{int}_{{}^{2}{}_{2}}(A) \subseteq \operatorname{int}_{{}^{2}{}_{1}}(A)$, $cl_{{}^{2}{}_{2}}(A) \supseteq cl_{{}^{2}{}_{1}}(A)$

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

ג. יהי $(\mathbb{R}, T)$ הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות

$$(0,1], (0,1), [0,1], [0,1)$$

שאלה 3

תהי X קבוצה אינסופית. יהי x_0 איבר ב X. נגדיר
${}^{2} = \{A \subseteq X : x_0 \notin A\} \cup \{B \subseteq X : X \setminus B \ is \ finite\}$.

א) הוכיחו ש ^{2} טופולוגיה על X.

ב) הראו שכל הנקודונים ב- X, פרט ל- $\{x_0\}$, הינם פתוחים וסגורים. מה לגבי $\{x_0\}$?

ג) הראו: $cl(A) = \begin{cases} A & A \ is \ finite \\ A \cup \{x_0\} & otherwise \end{cases}$

ד) הראו: $int(A) = \begin{cases} A & X \setminus A \ is \ finite \\ A \setminus \{x_0\} & otherwise \end{cases}$

שאלה 4

יהי X מרחב טופולוגי, U קבוצה פתוחה ו- A קבוצה צפופה.

הוכיחו $U\subseteq cl(A\cap U)$. הסיקו: $cl(U)=cl(A\bigcap U)$.

שאלה 5

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות לכל מ"ט X ולכל ת"ק $A,B\subseteq X$:

1. $cl(A\bigcup B)=cl(A)\bigcup cl(B)$
2. $int(A\bigcap B)=int(A)\bigcap int(B)$
3. $int(cl(A))=cl(int(A))$ (כלומר, הסְגור של הפְנים שווה לפְנים של הסְגור).

שאלה 6

א. יהיו X,Y מ"ט דיסקרטיים. הוכיחו כי $X\cong Y$ אמ"מ $|X|=|Y|$.

ב. נגדיר שתי תת קבוצות של $\mathbb{R}$: $B=\mathbb{N}$, $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\bigcup\{0\}$ עם הטופולוגיות המושרות מהמרחב הגדול, נסמנן: ${}^{2}{}_{A},{}^{2}{}_{B}$. הוכיחו כי $(A,{}^{2}{}_{A})$ אינו מרחב דיסקרטי, בעוד ש- $(B,{}^{2}{}_{B})$ כן דיסקרטי.

ג. הסיקו כי $(A,{}^{2}{}_{A})$ ו- $(B,{}^{2}{}_{B})$ אינם הומאומורפים.

ד. הוכיחו או הפריכו: $\mathbb{N}\cong\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

בונוס

יהי X מרחב טופולוגי. יהיו $A,B\subseteq X$. נתון: A,B תתי מרחבים קשירים, וכן $cl(A)\bigcap B\neq\varnothing$.
הוכיחו ש- $A\bigcup B$ תת מרחב קשיר.

בהצלחה!