בס"ד

תרגול מס' 10 בחשבון אינפי' 2

טורי חזקות

הגדרה: טור חזקות סביב האפס הוא טור פונקציות מהצורה: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

באופן כללי טור חזקות סביב נקודה x_0 הוא מהצורה: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-x_0\right)^k$.

(ע"י הצבה $t=x-x_0$ אפשר תמיד להגיע לטור הקודם ולכן נתמקד בטור סביב האפס).

משפט: לכל טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ אם תחום התכנסות חסום קיים מספר אי שלילי R כך שלכל $|x|<R$ הטור מתכנס בהחלט, ולכל $|x|>R$ הטור מתבדר. אחרת נרשום $R=\infty$ והטור מתכנס בכל $\mathbb{R}$.

הגדרה: המספר R (או סימון ∞) נקרא ***רדיוס ההתכנסות*** של הטור.

מסקנה: המשפט אינו נותן אינדיקציה לגבי התכנסות הטור בקצוות: $x=\pm R$, שם נצטרך לבדוק כל מקרה לגופו ע"י הצבת הקצוות. מעבר לכך תחום ההתכנסות של טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ הוא תמיד באזור סימטרי סביב האפס. נשים לב גם לכך שהתכנסות בתנאי יכולה להתרחש (אם בכלל) רק שם בקצוות: $x=\pm R$.

יהא $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ טור חזקות. אזי: **נוסחת קושי הדמר:** $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}$,

נוסחת דלמבר: אם קיים הגבול: $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ אז הוא שווה ל- R.

(דוגמאות: חשב תחום התכנסות של $\sum x^k/k^2$, $\sum x^k/k$).

משפט: טור חזקות מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור המוכל או שווה לתחום ההתכנסות שלו.

תרגיל: קבע התכנסות של הטור: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt[3]{k}}$.

פתרון: עפ"י הנוסחא של קושי: $R=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k^{1/3}}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^{1/3}} = 1$.

נבדוק בקצוות התחום: בנקודה $x=1$ מתקבל הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ שמתבדר.

בנקודה $x=-1$ מתקבל טור לייבניץ שמתכנס בתנאי.

<u>לסיכום</u>: הטור מתכנס בהחלט בקטע $(-1,1)$, מתכנס בתנאי בנקודה $x=-1$, ומתבדר בשאר.

הטור מתכנס במ"ש בכל קטע סגור $[-1,b]$ עבור $-1 \le b < 1$.

תרגיל: קבע התכנסות של הטור: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}(x-2)^{2k}$.

פתרון: נציב: $y=(x-2)^2$ ונקבל טור חזקות סביב האפס: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} y^k$.

נחשב עבורו את רדיוס ההתכנסות עפ"י דלמבר: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{e}$.

מכאן: $R_y = e$. כלומר הטור מתכנס עבור $|y|<e$ והטור המקורי מתכנס בתחום: $(x-2)^2 < e$,

כלומר בתחום: $|x-2| < \sqrt{e} \quad \Leftrightarrow \quad 2-\sqrt{e} < x < 2+\sqrt{e}$. ולכן $R_x = \sqrt{e}$.

מה קורה בקצוות ? נשים לב כי בטור המספרים $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!e^k}{k^k}$ אם נסמן: $b_k = \frac{k!e^k}{k^k}$ נקבל:

$\forall k\in\mathbb{N}: \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = e\left(\frac{k}{k+1}\right)^k > 1$ שכן $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ שואף ל- $\frac{1}{e}$ מלמעלה. כלומר לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות בשני הקצוות והטור מתכנס בהחלט בקטע $\left(2-\sqrt{e},2+\sqrt{e}\right)$ ובמ"ש בכל קטע סגור בו.

פיתוח פונקציות אלמנטאריות לטור חזקות.

תהא פונקציה $f(x)$ גזירה מכל סדר, כך שהטור $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ מתכנס נקודתית באיזשהו קטע $(-R,R)$. האם זה אומר כי $f(x)$ שווה לטור זה כהמשכה של פולינום טיילור? התשובה היא שלילית.

לדוגמה לפונקציה $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ יש נגזרות מכל סדר בכל מקום והן כולן מתאפסות באפס.

לפיכך טור המקלורן של פונקציה זו שווה זהותית לאפס אבל בוודאי אינו מייצג את הפונקציה.

התנאים המספיקים מופיעים במשפט הבא:

משפט: תהא $f(x)$ פונקציה הגזירה מכל סדר בקטע $[-r,r]$. אם קיים M כך ש:

$\left|f^{(k)}(x)\right| < M$ $\quad \forall k\in\mathbb{N}, x\in[-r,r]:$ ("חסימות של כל הנגזרות <u>במשותף</u>")

אז $f(x)$ הוא סכום של טור מקלורן שלה: $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ עם ר"ה $R\geq r$.

דוגמאות:

ניתן לפתח את הפונקציה $\sin x$ לטור מקלורן עם $R=\infty$ שכן $\sin x$ גזירה אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}$ וגם עבור $M=1$ בכל קטע $[-r,r]$ מתקיים: $\left|\sin^{(k)}(x)\right|\leq 1 \quad \forall k\in\mathbb{N}$.

הפיתוח הוא: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} = \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+\ldots$ עם $R=\infty$

תרגיל: חשב בקירוב של אלפית את הביטוי: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

פתרון: כיוון שלא קיימת ל- $\frac{\sin x}{x}$ פונקציה קדומה אלמנטארית, כדאי לפתח את $\frac{\sin x}{x}$ לטור חזקות ואז לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]dx = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}\right]dx$$

כיוון שרדיוס ההתכנסות של טור החזקות הוא אינסוף, אז הוא מתכנס במ"ש בכל קטע סופי, ולכן ניתן להחליף את סדר האינטגרל והסכום ולקבל:

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}\right]dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}dx\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}\right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} = 1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-......+r_n(x)$$

כעת יש לקחת מספיק איברים כך שהשארית תהיה קטנה בערכה המוחלט מהדיוק המבוקש.

במקרה שלנו זהו טור לייבניץ שלגביו מתקיים: $|r_n| = |S_n - S| \le a_{n+1} \quad \forall n:$.

נדרוש: $\frac{1}{1000} < \frac{1}{(2n+3)!(2n+3)} \le |r_n|$.

עבור $n=2$ נקבל את הדיוק הדרוש: $0.946 \approx 1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}$.

באותו האופן: $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}x^{2k}+... = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ עם $R=\infty$

וגם: $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+... = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ עם $R=\infty$.

הפיתוח לטור חזקות הוא יחיד ולכן עבור $|x|<1$ יש לנו את גם את פיתוח מקלורן: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

אכן הנקודה $x=1$ היא נקודה שבסביבתה אפילו הפונקציה עצמה (נגזרת אפס) אינה חסומה ותנאי המשפט הנ"ל מתקיימים בכל קטע $[-r,r]$ כך ש: $r<1$. מעבר לכך הטור מתבדר ולכן בהכרח $R=1$.

אם נציב $x=-t$ נקבל: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t}$ ומכאן באמצעות אינטגרציה איבר איבר נקבל:

$$\ln|1+x| = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k\right)dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}.$$

זה אמנם נכון ב-$(-1,1)$ אבל גם בנקודה $x=1$ הטור מתכנס, לכן בקטע $[0,1]$ ההתכנסות היא במ"ש ופונקצית הסכום רציפה משמאל בנקודה $x=1$ ולפיכך: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = ... + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2$.

אם נציב בטור הגיאומטרי $x=-t^2$ נקבל: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2}$ ומכאן:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

שוב הטור שקיבלנו מתכנס גם בנקודה $x=1$, הטור מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$, פונקצית הסכום רציפה משמאל בנקודה $x=1$, ולפיכך: $\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$.

קיבלנו טור לייבניץ באמצעותו ניתן לחשב את המספר π ברמת הדיוק הנדרשת.