

אלגברה לינארית 2 (88-113) - פתרון מועד א'

תרגיל. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ונביט במרחבי השורות, העמודות והאפס $\mathbb{R}^3$ $R(A), C(A), N(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית והנורמה המושרית ממנה.

(א) מצאו בסיסים אורתוגונליים לכל אחד משלושת המרחבים $R(A), C(A), N(A)$.
פתרון נתחיל מלמצוא בסיסים, לאחר מכן נפעיל גראם שמידט.

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עכשיו, שתי השורות הראשונות מהוות בסיס למרחב השורות

$$R(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

וכן שתי העמודות ראשונות במטריצה המקורית

$$C(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולסיום, המשתנה z חופשי. נסמן $z = t$

$$y + 3z = 0 \Rightarrow y = -3z = -3t$$

$$x - z = 0 \Rightarrow x = z = t$$

לכן,

$$N(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

זה כבר אורתוגונלי. נפעיל גראם שמידט על הבסיסים של $R(A), C(A)$.

$$R(A) = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
e_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\} \text{וקיבלנו} \\
C(A) &= \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{וקיבלנו} \\
&\quad \text{לסיכום,}
\end{aligned}$$

$$N(A) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, R(A) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\}, C(A) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(ב) מצאו את ההיטל של הוקטור } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ על מרחב השורות } R(A) \\
&\text{פתרון נסמן את הבסיס שמצאנו } \left\{ w_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 : \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

כזכור,

$$\pi_{R(A)}(v) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

עבור $\alpha_i = \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$,
לכן,

$$\alpha_1 = \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{8}{11}$$

סה"כ

$$\pi_{R(A)}(v) = \frac{8}{11} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/11 \\ 8/11 \\ 12/11 \end{pmatrix}$$

(ג) מצאו את $\min \{\|v - w\| : w \in R(A)\}$
פתרון

זה בדיוק ההיטל האורתוגונלי, נשים לב כי

$$\begin{aligned} \|v - w\| &= \|(\pi_{R(A)}(v) + (v - \pi_{R(A)}(v))) - w\| \\ &= \|(\pi_{R(A)}(v) - w) + (v - \pi_{R(A)}(v))\| \end{aligned}$$

עכשיו, $\pi_{R(A)}(v) - w \in R(A)$ וכן $v - \pi_{R(A)}(v) \in R(A)^\perp$, לפי פיתגורס

$$= \sqrt{\|(\pi_{R(A)}(v) - w)\|^2 + \|(v - \pi_{R(A)}(v))\|^2}$$

נבחין כי $\|(v - \pi_{R(A)}(v))\|^2$ לא תלוי בבחירת w .
ולכן ניתן למזער את הביטוי עבור בחירה $w = \pi_{R(A)}(v)$, כנדרש.

תרגיל. נביט במרחב המכפלה הפנימית $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הבאה

$$\langle v, w \rangle = v^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} w$$

ונביט באופרטור $T : V \rightarrow V$ המוגדר על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ a^2x - 3ay \end{pmatrix}$$

עבור $a \in \mathbb{R}$ פרמטר.
מצאו את כל ערכי הפרמטר a עבורם האופרטור T נורמלי, הרמיטי, אוניטרי.

פתרון

נשים לב כי נורמליות היא תנאי הכרחי לאוניטריות ולהרמיטיות.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ a^2x - 3ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ a^2 & -3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת $[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ a^2 & -3a \end{pmatrix}$, נרצה לבדוק שהיא נורמלית.

נשים לב כי הפולינום האופייני שלה הוא מתפרק לגורמים לינאריים

$$p_T(x) = \left| \begin{pmatrix} x & -4 \\ -a^2 & x + 3a \end{pmatrix} \right| = x^2 + 3ax - 4a^2 = (x + 4a)(x - a)$$

הע"ע הם $a, -4a$.

עבור $a = 0$ מתקבל ערך עצמי יחיד למטריצה שאינה אלכסונית, ראינו בתרגול שזה לא לכסין, בפרט לא לכסין אוניטרית ולכן לא נורמלי. לכן גם לא אוניטרי ולא הרמיטי. מעתה והלאה נניח $a \neq 0$, יש שני ערכים עצמיים ולכן לכסין. האם אוניטרית? נרצה לבדוק האם קיים בסיס אורתונורמלי המורכב מו"ע.

$$V_a = N \begin{pmatrix} a & -4 \\ -a^2 & 4a \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a & -4 \\ a & -4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-4a} = N \begin{pmatrix} -4a & -4 \\ -a^2 & -a \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -a & -1 \\ -a & -1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \right\}$$

נרצה ש $\begin{pmatrix} 4 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$ יהיו מאונכים

$$\begin{pmatrix} 4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-10a \end{pmatrix} = 4-4a+a-10a^2 = -10a^2-3a+4$$

$$= -(2a-1)(5a+4)$$

לכן מתאפשר אם ורק אם $a \in \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{4}{5} \right\}$.

עבור $a = \frac{1}{2}, -\frac{4}{5}$ ההעקה לכסין אוניטרית ולכן נורמלית. אחרת, היא אינה נורמלית (ולא אוניטרית ולא הרמיטית).

נותר לבדוק הרמיטיות ואוניטריות.

עבור $a = \frac{1}{2}, -\frac{4}{5}$ מתקיים $B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \right\}$ בסיס אורתונורמלי,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -4a \end{pmatrix}$$

אפשר גם לנרמל את הוקטורים, לקבל בסיס אורתונורמלי שבו $[T]_B$ אלכסונית ובפרט סימטרית (הרמיטית ממשית). לכן, עבור a כנ"ל היא גם הרמיטית.

אבל הע"ע הם לא מערך מוחלט 1, לכן לא אוניטרית.

לסיכום, A נורמלית והרמיטית אם ורק אם $a \in \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{4}{5} \right\}$ ואינה אוניטרית לאף a .

תרגיל. תהי מטריצה $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ כך שהירבוי האלגברי של $\lambda = 0$ הוא מספר זוגי.

עוד נניח כי קיים $a \in \mathbb{R}$ עבורו $A^2(A - aI) = -A$.

(א) הוכיחו כי A דומה לצורת ז'ורדן מעל שדה הממשיים.

פתרון

ידוע כי

$$x^2(x-a) + x = x(x^2 - ax + 1)$$

פולינום מאפס. לכן, $m_A(x) | x(x^2 - ax + 1)$,

מקרה 1 - אם 0 לא ע"ע (ריבוי אלגברי 0) אזי $(x^2 - ax + 1) \mid m_A(x)$. אילו השורשים של הפולינום הזה ממשיים, סיימנו. אחרת יש שני ערכים עצמיים $z, \bar{z}$ ולכן הפ"א מהצורה

$$(x - z)^a (x - \bar{z})^{5-a}$$

במקרה כזה הריבויים שלהם שונים (סכומם אי-זוגי), בסתירה (ראה טענת עזר).

מקרה 2 - מעתה והלאה נניח שהריבוי האלגברי של 0 הוא 2 או 4 . נניח בשלילה שאין צורת ז'ורדן מעל הממשיים, כלומר $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ע"ע. ממשפט מלינארית 1, גם $\bar{z}$ ע"ע.

עכשיו, כל הע"ע מופיעים בפולינום המינימלי. אנחנו יודעים על לפחות 3 ערכים עצמיים $(0, z, \bar{z})$ על כן הפולינום האופייני מדרגה לפחות 3 ומתוקן ולכן

$$m_A(x) = x(x^2 - ax + 1) = x(x - z)(x - \bar{z})$$

נכתוב

$$p_A(x) = x^a (x - z)^b (x - \bar{z})^{5-(a+b)}$$

עבור a זוגי, נקבל שהריבויים של $z, \bar{z}$ שונים (סכומם אי-זוגי) וזו סתירה (ראה טענת עזר).

טענת עזר אם לפולינום $p(x)$ מתקיים כי z שורש מריבוי מסוים, $\bar{z}$ שורש מאותו ריבוי. הוכחה ידוע כי אם z שורש גם $\bar{z}$ שורש, נחלק את $p(x)$ ב $(x - z)(x - \bar{z})$. הקטנו את הריבוי של $z, \bar{z}$ ב 1 . אילו הריבוי גדול מ 1 , שוב z שורש של הפולינום הזה וגם $\bar{z}$.

כך נמשיך ונחלק כריבוי האלגברי של z . לבסוף, נקבל שיש להם אותו ריבוי (אילו אחד מהם עדיין שורש גם הצמוד). הערה אפשר גם להראות שלא ייתכן ש $z, \bar{z}$ לא מאותו ריבוי על ידי הסתכלות על העקבה של המטריצה,

אם הם שונים היא יוצאת מרוכבת אבל המטריצה ממשית. (ב הוכיחו או הפריכו: A לכסינה מעל שדה הממשיים. פתרון נפרד. נסתכל על המטריצה

$$A = J_1(0)^2 \oplus J_1(1) \oplus J_2(1)$$

מיחידות צורת ז'ורדן היא אינה לכסינה. אכן, הריבוי האלגברי של 0 זוגי. כמו כן, יש לנו שני ע"ע $0, 1$.

ל 0 הבלוק הכי גדול הוא מגודל 1 ולכן בפולינום המינימלי מופיע בחזקה 1 , ל 1 הבלוק הכי גדול הוא מגודל 2 ולכן בפולינום המינימלי מופיע בחזקה 2 . נקבל

$$m_A(x) = x(x - 1)^2 = x(x^2 - 2x + 1)$$

עבור $a = 2$, מתקיימים התנאים ואינה לכסינה.

תרגיל. תהייה $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ הרמיטית ($H^* = H$). הוכיחו ששלושת התנאים הבאים שקולים:

- תנאי 1: לכל λ ע"ע של H מתקיים $\lambda \in \mathbb{R}$ וכן $\lambda \geq 0$.
- תנאי 2: לכל $v \in \mathbb{C}^n$ מתקיים $\langle v, Hv \rangle \in \mathbb{R}$ וכן $\langle v, Hv \rangle \geq 0$.
- תנאי 3: קיימת מטריצה $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ כך ש $H = B^* B$.

פתרון

הערה - למטריצה הרמיטית כל הע"ע ממשיים. יהי λ ע"ע יחד עם $v \neq 0$ ו"ע

$$\bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, Hv \rangle = \langle H^* v, v \rangle = \langle Hv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

מחיוביות לחלוטין של מ"פ, אפשר לחלק ב $\langle v, v \rangle$ ולקבל הדרוש.

נראה שקילות בין 1, 2 ובין 1, 3.
 $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ מטריצה הרמיטית היא בפרט נורמלית ולכן לכסינה אוניטרית, לכן קיים בסיס אורתונורמלי למרחב המורכב מוקטורים עצמיים.
 כלומר, אפשר לכתוב $v = \sum \alpha_i v_i$ כאשר v_i ו"ע עם ו"ע ממשי אי-שלילי λ_i . נקבל

$$\begin{aligned} \langle v, Hv \rangle &= \langle \sum \alpha_i v_i, H \left(\sum \alpha_i v_i \right) \rangle = \langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i H v_i \rangle \\ &= \langle \sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_i \lambda_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, \sum \alpha_i \lambda_i v_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle \end{aligned}$$

מאורתונורמליות

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_i} \lambda_i = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i$$

כאשר $|\alpha_i|^2 \geq 0$ וגם λ_i , לכן הביטוי חיובי.
 $\boxed{2 \Rightarrow 1}$ נראה שכל הע"ע של H אי-שליליים. יהי λ ע"ע של H וכן $v \neq 0$ ו"ע מתאים.

$$0 \leq \langle v, Hv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

עכשיו, $\langle v, v \rangle > 0$ (מחיוביות לחלוטין) ולכן $\bar{\lambda} \geq 0$, בפרט ממשי ואי-שלילי.
 $\boxed{1 \Rightarrow 3}$ נניח H חיובית, בפרט היא הרמיטית, לכן נורמלית ולכן לכסינה אוניטרית

$$H = PDP^*$$

כאשר D אלכסונית עם ע"ע אי-שליליים.
 עבור $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ נסמן $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, נשים לב כי $(D')^2 = D$.
 עכשיו

$$(PD'P^*)^* (PD'P^*) = PD'^* P^* PD' P^*$$

עכשיו $D'^* = D'$ כי היא אלכסונית ולכן שחלוף לא משפיע ובנוסף הערכים ממשיים לכן גם הצמוד.

$$= P (D')^2 P^* = PDP^* = H$$

כנדרש.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ נניח כי $H = B^* B$, נראה כי היא חיובית.
 יהי λ ע"ע של $B^* B$ יחד עם ע"ע $v \neq 0$ ונרצה להראות $\lambda \geq 0$ (וממשי).
 נסתכל על המכפלה הפנימית הבאה

$$0 \leq \langle Bv, Bv \rangle = \langle v, B^* Bv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

עכשיו אילו $Bv = 0$ אזי $B^* Bv = 0$ ויתקיים $\lambda = 0$.
 עבור $Bv \neq 0$ יתקיים מחיוביות לחלוטין

$$0 < \langle Bv, Bv \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

כמו כן $v \neq 0$ ולכן $\langle v, v \rangle > 0$, לכן, $\bar{\lambda} > 0$ וממשי. כך גם λ .

(ב) תהיינה A, B מטריצות חיוביות. הראו כי $\text{tr}(AB) \geq 0$.
פתרון 1 יהי λ ע"ע של AB יחד עם ו"ע $v \neq 0$.
 נסתכל על המ"פ הבאה:

$$\langle v, BABv \rangle = \langle v, B(\lambda v) \rangle = \bar{\lambda} \langle v, Bv \rangle$$

מצד שני, BAB היא חיובית. מתנאי (3) אפשר לכתוב

$$B = Y^*Y, A = X^*X$$

לכן

$$BAB = Y^*YX^*XY^*Y = (XY^*Y)^*(XY^*Y)$$

היא חיובית שוב מתנאי (3).

סה"כ מתנאי (2)

$$0 \leq \langle v, BABv \rangle = \bar{\lambda} \langle v, Bv \rangle$$

עכשיו מחיוביות של B נקבל $\langle v, Bv \rangle \geq 0$.

נחלק למקרים:

א. אם $\langle v, Bv \rangle > 0$ נקבל $\bar{\lambda} \geq 0$ וממשי, כך גם $\lambda \geq 0$.

ב. אחרת, $\langle v, Bv \rangle = 0$. בגלל B חיובית $B = H^*H$, לכן

$$\langle v, H^*Hv \rangle = \langle Hv, Hv \rangle = 0$$

נקבל $Hv = 0$. לכן $Bv = H^*Hv = 0$. סה"כ $ABv = 0$ ולכן $\lambda = 0$.

פתרון 2 מתנאי (3) אפשר לכתוב

$$A = X^*X, B = Y^*Y$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(X^*XY^*Y) = \text{tr}(XY^*YX^*) = \text{tr}((YX^*)^*(YX^*))$$

עכשיו $(YX^*)^*(YX^*)$ חיובית, מתנאי (3) שוב, לכן כל הע"ע אי-שליליים וכך גם סכומם.