משפט(נוכיח בסמסטר הבא)

יהי K, K' שני מרחבי CW שקולים הומוטופית. מספר התאים של K הוא $d_0, d_1, d_2, \ldots d_n$. מספר התאים של K' הוא $e_0, e_1, e_2, \ldots e_m$. אזי

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i e_i$$

מספר כזה $\sum (-1)^i d_i$ נקרא מציין אויילר χ.

לדוגמה

$$\chi (S^n) = 1 + (-1)^n$$

או למשל בפאון: $\chi = d_0 - d_1 + d_2 = 2$

מתרגיל 8, אנו יודעים שאם F מכיל טבעת מוביוס אז $F\#K \cong F\#T$ (T זה טורוס, K זה בקבוק קליין)

במילים אחרות:

$$F\#T \cong F\#P\#P$$

$nT\#mP$ - על סמוך התרגיל, אם $m \geq 1$ אז

$$nT\#mP = (2n + 2m)$$

אם $m = 0$ אז זה שווה ל-nT.

שילוש של המשטח

שילוש - לחלק את המשטח למשולשים קטנים.

משפט

לכל משטח יש שילוש.

הערה

מדובר על משטחים דו מימדיים - זה לא נכון למרחבים ממימד יותר גבוה

מבנה ידיות

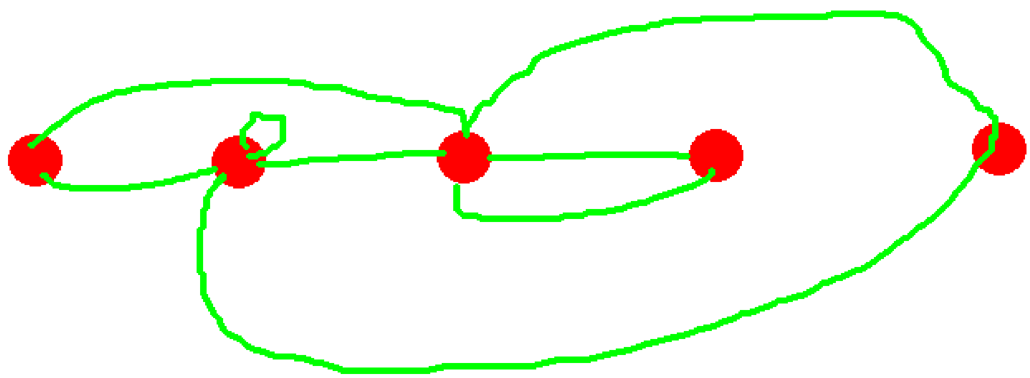
אפשר להמיר כל שילוש למבנה ידיות:

ידית 0 מימדית זה מרחב כוויץ ־ שקול הומוטופית לנקודה אחת.

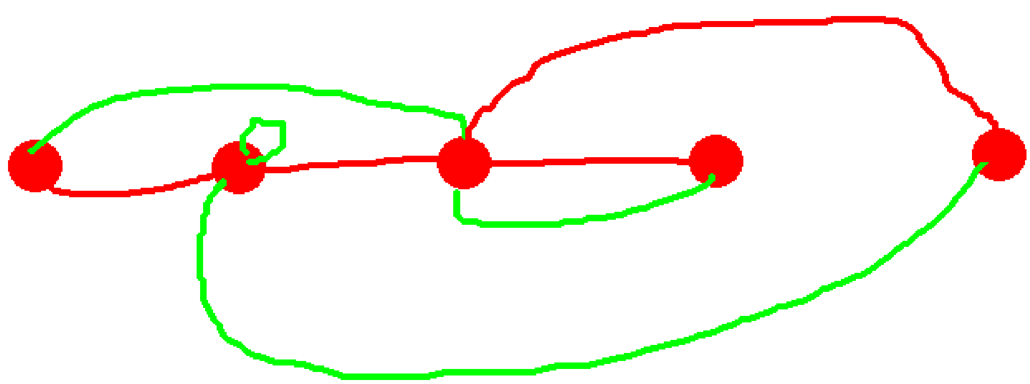
ידית 1 מימדית זה חיבור שיש בו מעגל.

הערה

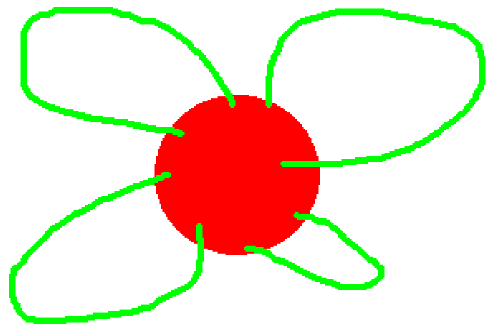
כל מבנה ידיות אפשר לתאר כך שיש לו רק ידית אחת מסדר אפס. לדוגמה:



אפשר לקחת את העץ הפורש:



ולהפוך אותו לדיסק יחיד:



הערה

יש שני סוגים של ידיות 1 ממדיות(ירוקות) - כאלו עם חצי סיבוב(יוצרות טבעת מוביוס) וכאלה בלי חצי סיבוב.

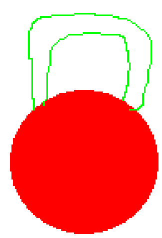
משפט

הבניה הזו תמיד תוליך למשהו מהצורה $nT\#mP$(או S^2 שניתן לחשוב עליו כמופיע במתכון הנ"ל עם$n=0, m=0$)

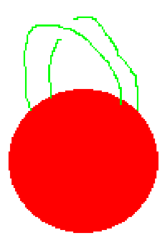
נוכיח את המשפט באינדוקציה

$F\#S^2 \cong F$(שכן מוציאים מF דיסק וסוגרים את זה בספרה שלקחו ממנה דיסק - שקול לדיסק). לכן בבנייה תמיד אפשר להתחיל מS^2 - כלומר עבור משטחים אפס ממדיים זה נכון.

אם מדביקים ידית 1 מימדית אז יש שתי אפשרויות:



אם מדביקים בצורה ישרה: - אז זה כמו שתי ספירות - כלומר שקול לS^2 פחות שני דיסקים(שנדביק אחר כך)



אם מדביקים עם חצי סיבוב: - אז זה שקול למישור פרוייקטיבי P

פחות דיסק אחד(שנדביק אחר כך)

נמשיך באינדוקציה על מספר הרצועות - נניח שהטענה נכונה לk רצועות(ירוקות) ונוכיח עבור $k+1$ רצועות.

מהנחת האינדוקציה עבור בניה עם k רצועות מקבלים $nT\#nP$, ולכן אחרי הדבקת k הרצועות וללא הדבקת הידיות ה2-ממדיות, מה שיש בידינו הוא $nT\#mP$ שהוצאו ממנו מספר דיסקים - כלומר משטח עם כמה חורים.

אם מוסיפים את הרצועה על אותו חור בלי חצי סיבוב זה לא ישנה את המשטח(כי זה כמו למתוח את המשטח ולהוריד ממנו דיסק - אבל מחזירים את הדיסק בחזרה בהמשך).

אם מוסיפים את הרצועה על אותו חור עם חצי סיבוב, אז מספר מעגלי השפה נשאר אותו הדבר, אבל לאחר סגירת הדיסק שהוסר נקבל סכום קשיר עם מישור פרוייקטיבי.

אם נוסיף רצועה מחור אחד לחור אחר בלי חצי סיבוב נקבל הדבקה עם טורוס כשנסגור את החורים.

אם נוסיף רצועה מחור אחד לחור אחר עם חצי סיבוב נקבל הדבקה של בקבוק קליין כשנסגור את החורים.

משפט

כל משטח סגור הוא S^2 או nT($n\geq 1$) או nP($n\geq 1$).

פתרון תרגילי בית

תרגיל 7 שאלה 2

נשתמש במרחב שהוא נסג עיוותי של המרחב הזה: נכווץ אותו לספירה ברדיוס k שהוסרו ממנה $2k$ נקודות.

טענה: $\pi_1\left(S^2\backslash k \text{ points}\right)=F_{k-1}$.

הוכחה: באינדוקציה. $S^2\backslash k$ שקול ל$D^2\backslash k-1$. נחתוך מהדיסק הזה דיסק שחסר בו חור אחד ונקרא לו U, לשאר(+ שוליים) נקרא V.

$$\pi_1\left(U\right)=F_1$$

$$\pi_1\left(U\cup V\right)=1$$

$$\pi_1\left(V\right)=F_{k-2}$$

קיבלנו

$$F_1\underset{1}{*}F_{k-2}=F_{k-1}$$

לכן

$$\pi_1\left(\mathbb{R}^3\backslash k \text{ lines}\right) = F_{2n-1}$$

תרגיל 8 שאלה 1

נקרא לטורוס אחד U ולשני V. $U\cap V$ הוא החיתוך ביניהם(עם שוליים) ־ ואפשר לעשות לו נסג עיוותי למעגל לכן $\pi_1\left(U\cap V\right)=F_1$. $\pi_1\left(U\right)=\pi_1\left(V\right)=\mathbb{Z}^2$. לכן

$$U\cap V=\mathbb{Z}^2 \underset{F_1}{*} \mathbb{Z}^2=\langle a,b,c,d|ab=ba,cd=dc,a=c\rangle =$$

$$=\langle a,b,d|ab=ba,ad=da\rangle = F_2\times F_1$$

נחשב את מבנה הCW של זה.

מבנה CW של טורוס אחד זה $\begin{matrix} d_0=1 \\ d_1=2 \\ d_2=2 \end{matrix}$. הטורוסים מזוהים במעגל ־ כלומר ניתן להשתמש באחד המסלולים של הטורוס הראשון גם בשביל הטורוס השני, ולכן

לפי מבנה CW

מבנה הCW של שני הטורוסים המודבקים הוא קודקוד אחד, שלוש צלעות ושני דיסקים: $\begin{matrix} d_0=1 \\ d_1=3 \\ d_2=2 \end{matrix}$. יש קודקוד שהוא עץ פורש ושני לולאות:

$$\left\langle a,b,c\middle|aba^{-1}b^{-1}=1,cbc^{-1}b^{-1}=1\right\rangle = \langle a,b,c|ab=ba,cb=bc\rangle$$

תרגיל 8 שאלה 2

יש לנו טורוס שמזוהה במעגל אחד עם טבעת מוביוס.

U יהיה כל הטורוס(+ שוליים) ולכן $\pi_1\left(U\right)=\pi_1\left(T\right)=\mathbb{Z}^2$.

V יהיה טבעת מוביוס(+ שוליים) ולכן $\pi_1\left(V\right)=\pi_1\left(\text{mobius strip}\right)=F_1$.

$U\cap V$ נסיג למעגל ולכן $\pi_1\left(U\cap V\right)=F_1$.

איזה יחס ההדבקה נותנת לנו? במעגל יש יוצר אחד ־ a. לטורוס שני יוצרים ־ b,c. לטבעת מוביוס יוצר אחד ־ d. סה"כ

$$\begin{tikzcd} U & & V \\ & U\cap V \arrow[ul, "b"] \arrow[ur, "d^2"'] & \end{tikzcd}$$

$$\left\langle b,c,d\middle|bc=cb,b=d^2\right\rangle \implies \left\langle c,d\middle|d^2c=cd^2\right\rangle$$