פתרון בוחן בקורס תורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש"ף, מועד ב'

הוראות כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 80 דקות.
חומר עזר: מחשבון רגיל בלבד (וגם אותו לא צריך).

שאלה 1. התשובה בכל סעיף צריכה להתחיל במילה "הוכחה" או במילה "הפרכה".

א. הוכיחו או הפריכו: החבורה $\mathbb{Z}_8 \times U_{18}$ היא ציקלית.

ב. הוכיחו או הפריכו: קיים אפימורפיזם $f : 2\mathbb{Z} \to U_{10}$.

פתרון.

א. הפרכה. החבורה U_{18} היא מסדר $\varphi(18) = \varphi(2)\varphi(3^2) = (2-1)(3^2-3) = 6$. לכן הסדר של החבורה בשאלה הוא $|\mathbb{Z}_8 \times U_{18}| = 8 \cdot 6 = 48$. אילו החבורה הייתה ציקלית, אז היה לה יוצר, שהוא בהכרח מסדר 48. נראה שהסדר של כל האיברים קטן מ-48. יהי $(a,b) \in \mathbb{Z}_8 \times U_{18}$ ונחשב

$$(a,b)^{24} = (\underbrace{a+\cdots+a}_{24}, \underbrace{b\cdots b}_{24}) = (24a, b^{24}) = (0,1) = e_{\mathbb{Z}_8 \times U_{18}}$$

כי $8a \equiv 0 \pmod 8$ וגם $b^6 \equiv 1 \pmod{18}$ לכל $a \in \mathbb{Z}_8$ ו-$b \in U_{18}$ לפי משפט אוילר בחבורות האלו. לכן הסדר של כל איבר הוא לכל היותר 24.
היו מי שחישבו $U_{18} = \{1,5,7,11,13,17\}$ וזו טענה נכונה, אבל מספיק לנו לדעת רק את הסדר של U_{18}. את המספר 24 מצאנו לפי חישוב $[8,6] = 24$.

ב. הוכחה. נשים לב כי $U_{10} = \{1,3,7,9\}$ וקל לבדוק כי היא חבורה ציקלית עם יוצר 3. נבחר $f(2k) = 3^k$, ונבדוק באופן מפורש שהפונקציה הזו היא על

$$f(0) = 3^0 \equiv 1, \quad f(2) = 3^1 \equiv 3, \quad f(4) = 3^2 \equiv 9, \quad f(6) = 3^3 \equiv 7$$

כאשר השיוויונות הם מודולו 10. נותר לבדוק כי f הומומורפיזמים. לכל $2k, 2k' \in 2\mathbb{Z}$ נחשב

$$f(2k+2k') = f(2(k+k')) = 3^{k+k'} = 3^k \cdot 3^{k'} = f(2k)f(2k')$$

ולכן זה הומומורפיזם. יש אפשרויות נוספות, ורובן מתבססות על מציאת התמונה של היוצר 2 של $2\mathbb{Z}$.

שאלה 2. זה אפשרי לפתור סעיף אחד מבלי לפתור או להסתמך על סעיף אחר.

א. מצאו שני שיכונים שונים $\varphi\colon S_5 \to S_6$ ו-$\psi\colon S_5 \to S_6$.

ב. הוכיחו כי התמונות $\varphi((12345))$ ו-$\psi((12345))$ של (12345) בכל שני שיכונים הן צמודות (ללא חשיבות לבחירה שלכם בסעיף הקודם).

פתרון.

א. יש שיכון טבעי $\varphi\colon S_5 \to S_6$ שבו $\varphi(\sigma) = \hat{\sigma}$ כאשר $\hat{\sigma}$ היא התמורה שבה $\hat{\sigma}(6) = 6$ ועבור שאר המספרים $1 \leq i \leq 5$ היא מתנהגת בדיוק כמו σ, כלומר $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$. קל לבדוק שזאת פונקציה חח"ע ושהיא הומומורפיזם. זה בעצם לקחת את העתקת הזהות $\mathrm{id}\colon S_5 \to S_5$ ולהרחיב את הטווח לאיברים של S_6, או בסימון של חלק מהתשובות:

$$\varphi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & 6\end{pmatrix}$$

אפשרות לשיכון נוסף מגיעה מתרגיל על הומומורפיזמים, לפיו בהנתן איבר בחבורה $x \in G$ הוכחתם שהפונקציה $\gamma_x\colon G \to G$ המוגדרת לפי $\gamma_x(g) = xgx^{-1}$ היא אוטומורפיזם, ובפרט חח"ע. יש המון אפשרויות לבחירה, כל עוד נבחר $x \neq \mathrm{id}$. למשל נבחר את $x = (123456)$ עם האוטומורפיזם $\gamma_x\colon S_6 \to S_6$. נרכיב את השיכון הטבעי עם γ_x שבחרנו ונקבל כי $\psi = \gamma_x \circ \varphi$ היא שיכון שונה שעומד בתנאי השאלה. למשל

$$\varphi(12) = (12) \neq (23) = \psi(12)$$

זכרו שהרכבת הומומורפיזמים היא הומומורפיזם, והרכבת פונקציות חח"ע היא חח"ע. לכן ψ שיכון. בסימון של חלק מהתשובות נקבל מבחירה שלנו ל-x:

$$\begin{aligned}\psi\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & i_1+1 & i_2+1 & i_3+1 & i_4+1 & i_5+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

שימו לב כי הפונקציה $\iota\colon S_5 \to S_6$ המוגדרת לפי $\iota(\sigma) = \sigma^{-1}$ היא לא הומומורפיזם, ובפרט לא מונומורפיזם. למשל

$$\iota((123)(234)) = \iota((12)(34)) = (12)(34) \neq (13)(24) = (132)(243) = \iota((123))\iota((234))$$

וכבר ראינו בתרגול שפונקציה $i\colon G\to G$ השולחת איבר להופכי היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית, אבל S_5 אינה אבלית.
דרך אחרת למציאת שיכון היא להזכר בהגדרה של החבורה הסימטרית. בהנתן קבוצה X, החבורה הסימטרית S_X היא אוסף הפונקציות החח"ע ועל $\sigma\colon X\to X$ עם פעולת ההרכבה. עבור הקבוצה $X=\{1,\dots,n\}$ סימנו בקיצור S_n. הבינו למה ברור שבמקרה ויש קבוצות X,Y מאותה עוצמה, אז $S_X\cong S_Y$. הרי זה אומר שיש פונקציה חח"ע ועל $\alpha\colon X\to Y$ והבינו איך בעזרתה בונים איזומורפיזם מהחבורה S_X לחבורה S_Y.
לכן למשל $S_5\cong S_{\{2,3,4,5,6\}}$, או במילים, אנחנו מזהים כל תמורה ב-S_5 כתמורה על הקבוצה $\{2,3,4,5,6\}$. אז כדי לפתור את השאלה משתמשים בשיכון הטבעי $S_5\to S_6$ ומרכיבים אותו עם האיזומורפיזם הזה.

ב. האיבר (12345) הוא מסדר 5, ולכן עובר לאיבר מסדר 5 בכל שיכון. האיברים היחידים מסדר 5 בחבורה S_6 הם מחזורים מאורך 5. ראינו כי מחלקות הצמידות ב-S_n נקבעות לפי מבנה המחזורים. לכן $\varphi((12345))$ וגם $\psi((12345))$ הם מחזורים מאורך 5 ב-S_6, ולכן צמודים.

שאלה 3. תזכורת: לפעולה של חבורה G על קבוצה A קוראים טרנזיטיבית אם לכל שני איברים $a_1,a_2\in A$ קיים $g\in G$ כך ש-$g*a_1=a_2$.

א. מצאו פעולה טרנזיטיבית של $\mathbb{Z}_{22}$ על הקבוצה $\{\text{א},\text{ב},\dots,\text{ת}\}$ של 22 אותיות האלפבית העברי.

ב. הוכיחו שכל פעולה של חבורה מסדר 22 על הקבוצה $\{1,2,\dots,44\}$ היא לא טרנזיטיבית.

פתרון.

א. בקבוצה $A=\{\text{א},\text{ב},\dots,\text{ת}\}$ יש 22 איברים ולכן יש פונקציה $f\colon A\to\mathbb{Z}_{22}$ שהיא חח"ע ועל (למעשה יש $22!$ פונקציות כאלו). למשל נתאים לאות א' את האיבר $0\in\mathbb{Z}_{22}$, לאות ב' את האיבר $1\in\mathbb{Z}_{22}$ וכך עד התאמת האות ת' לאיבר $21\in\mathbb{Z}_{22}$. כעת הפעולה שלנו תהיה הכפל משמאל של $\mathbb{Z}_{22}$ (זה חיבור מודולו 22) עם הזיהוי של A כ-$\mathbb{Z}_{22}$. כלומר זאת הפונקציה $\varphi\colon\mathbb{Z}_{22}\times A\to A$ המוגדרת לפי $g*a=f^{-1}(g+f(a))$. ראינו בהרצאה ובתרגול כי פעולת הכפל משמאל של חבורה על עצמה היא טרנזיטיבית. למעשה זה השיכון $\varphi\colon\mathbb{Z}_{22}\to S_{22}$ ממשפט קיילי.
בפירוט, נראה שזו פעולה. לכל $a\in A$ מתקיים

$$0*a=f^{-1}(0+f(a))=f^{-1}(f(a))=a$$

ולכל $g,h\in\mathbb{Z}_{22}$ מתקיים

$$\begin{aligned}g*(h*a)&=g*(f^{-1}(h+f(a)))=f^{-1}(g+f(f^{-1}(h+f(a))))\\&=f^{-1}(g+(h+f(a)))=f^{-1}((g+h)+f(a))=(g+h)*a\end{aligned}$$

ובשביל הטרנזיטיביות, יהיו $a_1, a_2 \in A$. אז נבחר $g = f(a_2) - f(a_1)$ ונחשב

$$(f(a_2) - f(a_1)) * a_1 = f^{-1}(f(a_2) - f(a_1) + f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) = a_2$$

היו שהסתבכו עם כתיבה מתמטית כזו. מה שהיה צריך לעשות הוא למשל לסמן ב-a_i את האות במקום ה-i באלפבית העברי, כמו ג $= a_3$, ולהגדיר $n * a_i = a_{(i+n) \bmod 22}$. נוכיח שזו אכן פעולה. נבדוק קיבוציות:

$$\begin{aligned} g * (h * a_i) &= g * (a_{(i+h) \bmod 22}) = a_{((i+h) \bmod 22 + g) \bmod 22} \\ &= a_{(i+(g+h)) \bmod 22} = ((g+h) \bmod 22) * a_i \end{aligned}$$

ואיבר יחידה מקיים $0 * a_i = a_{(i+0) \bmod 22} = a_i$.
צריך להבין שהמחלקה של n שמעבירה אות n מקומות קדימה היא מודולו 22. שימו לב שלא היינו מקבלים פעולה מוגדרת היטב עם $\mathbb{Z}_{21}$ או $\mathbb{Z}_{23}$, שלא הייתה עובדת כמו שמוכיחים בסעיף הבא. לכן חשוב להוכיח שהפונקציה מוגדרת היטב, כלומר אם $n \equiv n' \pmod{22}$, אז $n * a_i = n' * a_i$.

ב. פעולה של חבורה על קבוצה היא טרנזיטיבית אם ורק אם יש בה מסלול אחד בלבד (לפי הגדרה ניתן להגיע מכל איבר נתון בקבוצה לכל איבר אחר). במקרה שלנו, יהיה מסלול אחד עם 44 איברים. אבל בחבורה יש רק 22 איברים, ולכן ניתן להגיע מאיבר נתון לכל היותר ל-22 איברים שונים.
כמו כן, לפי משפט מסלול-מייצב, הגודל של כל מסלול בפעולה של חבורה G על קבוצה A, מחלק את סדר החבורה. נסיק כי 44 מחלק את 22, שזו כמובן סתירה.

בהצלחה!