

לאגברה לינארית תרגול 11

3 בינואר 2021

1 זווית בין וקטורים

הגדרה: אם $v, u \in V$ אז הזווית ביניהם מקיימת:

$$\cos \theta = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \|u\|}$$

תרגילים:

1. V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$. יהי $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס או"נ. יהי $v \in V$ הוכיחו:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i \quad (\text{א})$$

(ב) נסמן ב- θ_i את הזווית שבין v לבין u_i . הוכיחו:

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i = 1$$

פתרון: א. כיון ש- B בסיס, אז יש $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש-

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

ונראה $\forall k : \langle v, u_k \rangle = \alpha_k$. הוכחה:

$$\langle v, u_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, u_k \right\rangle \stackrel{\text{Lin}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle u_i, u_k \rangle \stackrel{i \neq k \Rightarrow \langle u_i, u_k \rangle = 0}{=} \alpha_k \langle u_k, u_k \rangle = \alpha_k$$

כאשר $\langle u_k, u_k \rangle = 1$ כי נתון שהבסיס או"נ.

ב. פשוט נחשב:

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\langle v, u_i \rangle}{\|v\| \|u_i\|} \right)^2 = \frac{1}{\|v\|^2} \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle^2$$

נחשב את נורמה v :

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i, \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \cdot \left\langle u_i, \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \cdot \left(\sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle \cdot \langle u_i, u_j \rangle \right) \\ &\text{נסתכל על הסכום הפנימי, ונשים לב ש:}\end{aligned}$$

$$\forall j \neq i : \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

ולכן המחובר הנ"ל בסכום לא מעניין, ונותר לנו רק המקרה בו $j = i$ ואז מקבלים:

$$\langle v, u_i \rangle \cdot \langle u_i, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle$$

קיבלנו בעצם:

$$\sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle \cdot \langle u_i, u_j \rangle = \langle v, u_i \rangle$$

ולכן נקבל כהמשך למקודם:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \cdot \left(\sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle \cdot \langle u_i, u_j \rangle \right) = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle^2$$

ולכן, כהמשך למה שהתחלנו בו:

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\langle v, u_i \rangle}{\|v\| \|u_i\|} \right)^2 = \frac{1}{\|v\|^2} \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle^2} \cdot \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle^2 = 1$$

2. פיתגורס: יהי V ממ"פ ויהיו v, u או"ג, הוכיחו:

$$\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$$

פתרון: נחשב:

$$\|v + u\|^2 = \langle v + u, v + u \rangle =$$

מלינאריות נוכל לפרק:

$$\langle v, v \rangle + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} + \langle u, u \rangle = \|v\|^2 + \|u\|^2$$

2 הטלות וגראם-שמידט

תרגילים:

$$1. \text{ מצאו הטלה של } v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ על } W = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון: כדי לחשב הטלה על תת מרחב וקטורי W , צריך בסיס א"ג של W . לכן כאן התחלתי מראש עם בסיס א"ג. מה זה הטלה? מסמנים את ההטלה של v על W ב- $\pi_W(v)$ ומתקיים:

$$v - \underbrace{\pi_W(v)}_{\in W} \in W^\perp$$

ההטלה היא:

$$\pi_W(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 =$$

אצלנו:

$$= \frac{6}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-2}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-1 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$:v - \underbrace{\pi_W(v)}_{\in W} \in W^\perp \text{ נוודא שאכן}$$

$$\langle v - \pi_W(v), v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$\langle v - \pi_W(v), v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 1 + 0 = 0$$

2. יהי V ממ"פ, $W \leq V$ תת-מרחב. ויהי $v \in V$. הוכיחו:

$$\|v - \pi_W(v)\| = \min_{w \in W} \|v - w\|$$

במילים: ההיטל של v על W הוא הוקטור ב- W הקרוב ביותר ל- v (כאשר הנורמה של ההפרש מגדירה מרחק)
פתרון: יהי $w \in W$ וצריך להראות

$$\|v - \pi_W(v)\| \leq \|v - w\|$$

ואכן:

$$\|v - w\|^2 = \left\| \underbrace{v - \pi_W(v)}_{\in W^\perp} + \underbrace{\pi_W(v) - w}_{\in W} \right\|^2 \underset{*}{=} \|v - \pi_W(v)\|^2 + \underbrace{\|\pi_W(v) - w\|^2}_{\geq 0} \geq \|v - \pi_W(v)\|^2$$

(שוויון * הוא פיתגורס). קיבלנו:

$$\|v - \pi_W(v)\|^2 \leq \|v - w\|^2$$

הוצאת שורש מסיימת את ההוכחה.

3. מצאו בסיס א"נ של

$$W = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון: לפי האלגוריתם:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \pi_{w_1}(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{8}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ 1 \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \pi_{w_1}(v_3) - \pi_{w_2}(v_3)$$

בסוף צריך לזכור לחלק מנורמה של כל וקטור כדי לקבל בסיס א"נ.

4. יהי $v \in V$ ניתן לרשום אותו כסכום של שני וקטורים: אחד מ- W והשני ניצב ל- W :

$$v = \underbrace{v - \pi_W(v)}_{\in W^\perp} + \underbrace{\pi_W(v)}_{\in W}$$