תרגיל 9

1. יהיו $\{X_i\}$ מספר לא סופי של מ״ט. הוכיחו כי אם $\emptyset \neq U_i \neq X_i$ פתוחות ב X_i אזי $\prod U_i$ אינה פתוחה ב $X = \prod X_i$.
פתרון:
נניח בשלילה כי היא פתוחה אזי יש קבוצה פתוחה בסיסית $\prod V_i$ שמוכלת בה. מהגדרת טופולוגית המכפלה (מכיוון שזה מכפלה אינסופית) קיים i כך ש $V_i = X_i$ (האמת אינסוף כאלה אבל זה לא משנה) ולכן $U_i \subsetneq V_i$ ומכיוון ש $\prod U_i$ לא ריקה (כי כל הקבוצות לא ריקות) אזי לא ייתכן כי $\prod V_i \subseteq \prod U_i$.

2. יהיו $\{X_i\}$ מ״ט (מספר סופי או אינסופי). ויהיו S_i סגורה ב X_i. הוכיחו כי $\prod S_i$ סגורה ב $\prod X_i$.
פתרון:
נוכיח כי המשלים פתוחה. אכן, לכל i נגדיר $O_i = \prod_{j \neq i} X_i \times S_i^c$ פתוחה במכפלה $\prod X_i$ ומתקיים כי

$$\left(\prod S_i\right)^c = \cup_i O_i$$

שפתוחה כאיחוד של פתוחות.

3. יהא X אינסופי עם הטופלוגיה הדיסקרטית. הוכיחו כי X אינו קומפקטי.
פתרון:
הנקודונים $\{\{x\} : x \in X\}$ הם כיסוי פתוח של X אבל אין תת כיסוי סופי כי X אינסופי.

4. הוכיחו כי l_∞ אינו קומפקטי (תזכורת $l_\infty = \{x : \sup |x_i| < \infty\}$). הדרכה: מצאו קבוצה סגורה שאינה קומפקטית.
פתרון:
נסתכל על $A = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ וקטורי היחידה. קבוצה זאת סגורה (ראינו, כי היא סגורה לגבולות כי כל סדרה מתכנסת היא קבוע לבסוף כי המרחק בין כל שני איברים שונים בקבוצה הוא 1) והטופולוגיה המצומצמת ל A היא הדיסקרטית. כיוון ש A לא סופי נקבל כי הוא לא קומפקטי.

5. הוכיחו כי $X = [0, 1]$ עם הטופולוגיה המשורית מסונגפריי אינו קומפקטי.
פתרון:
הנקודון $\{1\} = X \cap [1, 2)$ פתוח ב X. לכן $\{\{1\}\} \cup \left\{[0, 1 - \frac{1}{n})\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ הוא כיסוי פתוח של X אבל אין לו תת כיסוי סופי. (הקבוצות $[0, 1 - \frac{1}{n})$ הן שרשרת עולה ולכן איחוד סופי של כאלה קבוצות תהא הקבוצה ״הגדולה״ מבניהם.)

6. יהא X מ״ט, יהיו $\{A_i\}_{i \in I}$ מספר סופי של ת״מ קומפקטים. הוכיחו כי $\cup A_i$ קומפקטי גם כן.
פתרון:

יהא $\{O_k\}$ כיסוי פתוח של $\cup A_i$ אזי לכל i $\{O_k \cap A_i\}$ הוא כיסוי פתוח של A_i ולכן יש לו תת כיסוי סופי $\{O_{k_j} \cap A_i\}_{j\in I_i}$ בפרט $A_i \subseteq \cup O_{k_j}$. נאחד את כל הקבוצות הסופיות האלה $\{O_{k_j}\}_{j\in \cup I_i}$ ונקבל תת כיסוי סופי של $\cup A_i$.

7. תזכורת: מרחב האוסדורף X נקרא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה $x \in X$ קיימת קבוצה קומפקטית A כך ש$x \in int(A)$.

תרגיל (קומפקטיפיקציית הנקודה): יהא X מרחב T_2 שאינו קומפקטי. נגדיר $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ כאשר ∞ איבר שלא ב X. נגדיר טופלוגיה τ על $\hat{X}$ ע"י שנגדיר את הקבוצות הסגורות בו: הקבוצות הסגורות ב $\hat{X}$הן תתי הקבוצות הקומפקטיות של X והקבוצות מהצורה $S \cup \{\infty\}$ עבור S סגורה ב X.

(א) הוכיחו כי אכן τ טופולוגיה (היעזרו בעובדה כי כל קבוצה סגורה F ב $\hat{X}$ מקיימת כי $F \setminus \{\infty\}$ קבוצה סגורה ב X).

פתרון:

- $\emptyset \in \tau$ כי היא קומפקטית ב X, $\hat{X} \in \tau$ כי $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ ו X סגורה ב X.
- חיתוך כל שהוא של סגורות $\{F_i\}$: אם קיים i כך ש $F_i \subseteq X$ אזי $\cap F_i = \cap (F_i \setminus \{\infty\})$ וזה חיתוך של סגורות ב X ולכן סגורה ב X. בנוסף, החיתוך מוכל ב F_i שקומפקטית ב X ולכן החיתוך גם הוא קומפקטי ב X ולכן סגור. אחרת, לכל i מתקיים כי $F_i = S_i \cup \{\infty\}$ עבור S_i סגורה ב X ולכן $\cap F_i = (\cap S_i) \cup \{\infty\}$ שזה איחוד של קבוצה סגורה ב X (היינו $\cap S_i$ כחיתוך של סגורות) עם $\{\infty\}$ ולכן סגור.
- איחוד של סגורות F_1, F_2: אם $F_1, F_2 \subseteq X$ אזי הם קומפקטים ואיחוד סופי של קומפקטים הוא קומפקטי. אחרת $F_1 \cup F_2 = (F_1 \setminus \{\infty\}) \cup (F_2 \setminus \{\infty\}) \cup \{\infty\}$ שאלו איחוד סופי של סגורות ב X (ולכן סגורה ב X) איחוד עם $\{\infty\}$ ולכן סגור ב $\hat{X}$.

(ב) הוכיחו כי X הוא תת מרחב של $\hat{X}$.

פתרון:

נראה שהסגורות של X הם מהצורה חיתוך של X עם סגורה של $\hat{X}$.

אכן לכל קבוצה סגורה S ב X מתקיים כי $F = S \cup \{\infty\}$ סגור ב $\hat{X}$ ומתקיים כי $S = X \cap F$. בנוסף אם $F \subseteq X$ קומפקטית ולכן סגורה ב $\hat{X}$ אזי $F = F \cap X$.
כיוון שקומפקטי גורר סגור ב T_2 נקבל שהיא סגורה ב X.

לסיכום: כל חיתוך של קבוצה סגורה ב $\hat{X}$ עם X היא סגורה ב X. וכל קבוצה סגורה ב X היא חיתוך של קבוצה סגורה ב $\hat{X}$ עם X.

(ג) הוכיחו כי $\hat{X}$ הוא קומפקטי.

פתרון:

יהיו $\{F_i\}$ סגורות כך ש $\cap F_i$ ריק. אם קיים i כך ש $F_i \subseteq X$ קומפקטי אזי $\{F_j \cap F_i\}_j$ אוסף של קבוצות סגורות ב F_i שהחיתוך שלהם ריק ולכן יש חיתוך סופי $\cap (F_{j_k} \cap F_i)$ שהוא ריק וזהו גם חיתוך סופי ומהקבוצות $\{F_i\}$.
אחרת, לכל i מתקיים כי $F_i = S_i \cup \{\infty\}$ ואז החיתוך שלהם מכיל לפחות את $\{\infty\}$ולא ריק.

(ד) הוכיחו כי X צפופה ב $\hat{X}$.

פתרון:

מתקיים כי $cl(X) \in \left\{X, \hat{X}\right\}$ כי אלו שני הקבוצות היחידות המכילות את X. נניח בשלילה כי $cl(X) = X$ אזי X סגורה. אבל X אינו קומפקטי וגם לא מהצורה $S \cup \{\infty\}$.

(ה) הוכיחו כי X קומפקטי מקומי אמ"מ $\hat{X}$ הוא T_2

פתרון:

$(\Rightarrow)$ נתון $\hat{X}$ הוא T_2. צ"ל X קומפקטי מקומי, לצורך כך יהא $x \in X$. קיימות סביבות פתוחות זרות כך ש $x \in V, \infty \in U$ לכן $x \in V \subseteq U^c$. U^c סגורה ב $\hat{X}$ ו $\infty \notin U^c$ ולכן היא קומפקטית ב X.

$(\Leftarrow)$ נתון X קומפקטי. צ"ל $\hat{X}$ הוא T_2. יהיו $x_1 \neq x_2$. אם שניהם ב X אזי אפשר להפריד אותך עם קבוצות זרות פתוחות ב X והם יהיו גם פתוחות ב $\hat{X}$. אחרת, בה"כ $x_2 = \infty$ אבל $\{\infty\}$סגוחה ולכן היא והמשלים שלה יפרידו. (היא סגורה כי $\{\infty\} = \emptyset \cup \{\infty\}$ והיא פתוחה כי היא המשלים של X שהיא קומפקטית ולכן סגורה ב $\hat{X}$.

8.]בונוס[

(א) הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ אינו קומפקטי מקומי והסיקו כי קומפקטיפיקציית הנקודה $\hat{\mathbb{Q}}$ אינה T_2.

פתרון:

נראה של 0 אין סביבה קומפקטית. נניח בשלילה שיש סביבה קומפקטית $0 \in K$ אזי קיימת קבוצה פתוחה בסיסית $B(0, \epsilon)$ כך ש $0 \in B[0, \epsilon] \subseteq K$ מה שאומר ש $B[0, \epsilon]$ קומפקטי כי הוא סגור בתוך קומפקטי. אבל: נבחר $-\epsilon < r < \epsilon$ שאינו רציונאלי. ואז $B[0, \epsilon] = ([-\epsilon, r] \cap \mathbb{Q}) \cup ((r, \epsilon] \cap \mathbb{Q})$ ולכן $\{(r, \epsilon] \cap \mathbb{Q}\} \cup \left\{[-\epsilon, r - \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}\right\}_n$ כיסוי פתוח של $B[0, \epsilon]$ שאין לו תת כיוסי סופי. סתירה.

(ב) הוכיחו כי ב $\hat{\mathbb{Q}}$ כי כל קבוצה היא סגורה אמ"מ היא קומפקטית.

פתרון:

תהא $S \subseteq \hat{\mathbb{Q}}$ קבוצה

$(\Rightarrow)$ נניח S קומפקטית ב $\hat{\mathbb{Q}}$. אם $S \subseteq \mathbb{Q}$ אזי היא קומפקטית ב $\mathbb{Q}$ (כי קובצות פתוחות ב $\mathbb{Q}$ הם גם פתוחות ב $\hat{\mathbb{Q}}$) ולכן סגורה ב $\hat{\mathbb{Q}}$.

אם $S \ni \infty$ אזי $S = S' \cup \{\infty\}$ עבור $S' \subseteq \mathbb{Q}$. נראה כי S' סגורה ב $\mathbb{Q}$. נניח בשלילה שלא אזי קיימות נקודות $x_n \in S'$ ששואפות ל $x \in \mathbb{Q}$ אבל $x_n \to x \notin S'$. ראינו כי $\mathbb{Q} \supseteq K = \{x_n\}_n \cup \{x\}$ קומפקטית ב $\mathbb{Q}$ (נקודות+ גבול היא קבוצה קומפקטית) ולכן K סגורה ב $\hat{\mathbb{Q}}$. ולכן $\infty \in K^c$ פתוחה ב $\hat{\mathbb{Q}}$. עוד נסמן $r_n = |x - x_n|$ ונגדיר $B_n = B(x_n, \frac{r_n}{2})$ כדורים פתוחים ב $\mathbb{Q}$ ולכן גם פתוחות ב $\hat{\mathbb{Q}}$. מכאן ש $\{B_n\} \cup \{K^c\}$ קבוצות פתוחות ב $\hat{\mathbb{Q}}$ שמכסות את S ולכן יש תת כיסוי סופי $\{B_{n_k}\} \cup \{K^c\}$ אבל $\cup B_{n_k}$ לא מכסה את S' (כי עבור $r_0 = \min\{r_{n_k}\}$ מתקיים שקיים $x_N \in B(x, \frac{r_0}{2}) \setminus [\cup B_{n_k}]$) סתירה.

$(\Leftarrow)$ נתון S סגורה. אם $S \subseteq \mathbb{Q}$ קומפקטית ב $\mathbb{Q}$ היא קומפקטית ב $\hat{\mathbb{Q}}$ (כי אם יש קבוצות פתוחות $\{O_i\}$ ב $\hat{\mathbb{Q}}$ שמכסות את S אזי $\{O_i \setminus \{\infty\}\}$ קבוצות פתחות ב $\mathbb{Q}$ שמכסות את S ולכן יש תת כיסוי סופי).

אם $S = S' \cup \{\infty\}$ עבור S' סגורה ב $\mathbb{Q}$: יהא קבוצות פתוחות ב $\hat{\mathbb{Q}}$, $\{O_i\}$ שמכסות את S אזי קיים $\infty \in O_j$ ואז $S' \subseteq \mathbb{Q} \setminus O_j$ קומפקטי ב $\mathbb{Q}$ וניתן למצוא לו תת כיסוי סופי מתוך $\{O_{i_k} \setminus \{\infty\}\}$. ומכאן ש $\{O_{i_k}\} \cup \{O_j\}$ תת כיסוי סופי של S'.