אלגברה לינארית 2 (88113)
תשובות למבחן מועד ב'

1.

א. $\det(A) = adg - aef - bcg$. סכום של 3 מספרים שלמים אי-זוגיים הוא שלם אי-זוגי, ובפרט איננו אפס.

ב. $\det(I + A^{-1}) = \det\big(A^{-1}(A + I)\big) = \det(A)^{-1}\det(A + I) = \det(A + I)$

ג. אם נבצע על A את פעולות השורה הבאות: הוספת השורה הראשונה לכל אחת מהשורות האחרות, ואחר כך הכפלת השורה הראשונה ב-2, נקבל את $A + B$. פעולות שורה אלו מכפילות את הדטרמיננטה ב-2.

2.

א. פ"מ = $(x-1)(x+1)$ אם $c = 1$, או אם $c = -1$ וגם $b = 0$.
פ"מ = $(x-1)(x+1)(x-c)$ אחרת.

ב. $c \neq -1$, או $c = -1$ וגם $b = 0$.

ג. $a = b = 0$.

3.

א. עבור A: $5J_1(0)\oplus J_1(3)$, $4J_1(0)\oplus 2J_1(3)$, $3J_1(0)\oplus 3J_1(3)$, $2J_1(0)\oplus 4J_1(3)$, $J_1(0)\oplus 5J_1(3)$.
עבור B: $3J_2(3)$, $2J_2(3)\oplus 2J_1(3)$, $J_2(3)\oplus 4J_1(3)$.

ב. ריבוי גאומטרי 3 לע"ע 3: עבור A: $3J_1(0)\oplus 3J_1(3)$. עבור B: $3J_2(3)$.
ריבוי גאומטרי 4 לע"ע 3: עבור A: $2J_1(0)\oplus 4J_1(3)$. עבור B: $2J_2(3)\oplus 2J_1(3)$.

ג. A יכולה להיות סימטרית – למשל כל אחת מהמטריצות האלכסוניות בסעיף א'.
B איננה לכסינה, כי הפ"מ אינו מתפרק לגורמים לינאריים שונים, ולכן איננה יכולה להיות סימטרית.

4.

א. למשל: $(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,-1), \frac{1}{\sqrt{18}}(-1,2,2,3))$.

ב. למשל: $((-2,-2,1,0), (1,-1,0,1))$.

ג. למשל: $(\frac{1}{3}(-2,-2,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1))$.

ד. ההיטל על W: $\frac{1}{3}(0,2,4,2)$. ההיטל על $W^\perp$: $\frac{1}{3}(3,1,-1,1)$. סכומם הוא כמובן $v = (1,1,1,1)$.

5.

א. בסעיף זה נפלה טעות בשאלון. המטריצה הנתונה A אינה לכסינה אוניטרית.

ב. מטריצה אוניטרית U דומה למטריצה אלכסונית D שאברי האלכסון שלה (שהם הע"ע של U) מקיימים $|\lambda_i| = 1$. לכן:
$$|\det(U)| = |\det(D)| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| = |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| = 1$$

ג. מאותה סיבה,
$$|\mathrm{tr}\,(U)| = |\mathrm{tr}(D)| = |\lambda_1 + \cdots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| = n$$