תרגיל בית 4 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ז

הוראות זכרו למלא ולהגיש את הדו"ח.

שאלה 1. יהי $f\colon R \to S$ הומומורפיזם של חוגים חילופיים, ויהי $I \lhd S$ אידאל ראשוני. הוכיחו כי $f^{-1}(I) \lhd R$ אידאל ראשוני.

שאלה 2. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שחיתוך שני אידאלים מקסימליים שונים של R אינו אידאל ראשוני.

שאלה 3. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שבקבוצה $\mathcal{P}$ של כל האידאלים הראשוניים של R קיים $I \in \mathcal{P}$ שהוא מינימלי ביחס להכלה.
רמז שהוא הדרכה: הראו שחיתוך כל שרשרת מ-$\mathcal{P}$ הוא אידאל ראשוני, והשתמשו בלמה של צורן.

שאלה 4. יהי R תחום שלמות.

א. הוכיחו כי $R \times \{0\} \lhd R \times R$ הוא אידאל ראשוני.

ב. לכל $n \in \mathbb{N}$ מצאו חוג שיש לו בדיוק n אידאלים ראשוניים נאותים. רמז: הסעיף הקודם עם תחום שלמות מיוחד.

שאלה 5. עבור האידאלים הבאים קבעו האם הם ראשוניים והאם הם מקסימליים.

א. $I = \langle 3x+1 \rangle \lhd \mathbb{Z}[x]$.

ב. $I = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathbb{Q}\} \lhd \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = R$. רמז: הראו $R \cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle$.

ג. $I = \langle \overline{x+1} \rangle \lhd \mathbb{F}_3[x]/\langle x^4 - 16 \rangle$ כאשר בסימון $\overline{x+1}$ הכוונה לתמונה של $x+1$ בהטלה לחוג המנה. רמז: אפשר להשתמש במשפט השאריות הסיני.

שאלה 6. חוג R נקרא ראשוני למחצה אם לא קיים אידאל $0 \neq I \lhd R$ כך ש-$I^2 = 0$. אידאל P בחוג כלשהו R נקרא ראשוני למחצה אם R/P הוא חוג ראשוני למחצה. אידאל $I \lhd R$ נקרא נילפוטנטי אם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$I^k = 0$.

א. הוכיחו שחוג הוא ראשוני למחצה אם ורק אם אין בו אידאלים נילפוטנטיים (חוץ מ-0).

ב. הוכיחו כי $P \lhd R$ ראשוני למחצה אם ורק אם לכל $a \in R$, שאם $aRa \subseteq P$ אז $a \in P$.

ג. מצאו את כל האידאלים הראשוניים למחצה של $\mathbb{Z}$.

שאלה 7. ראינו שעבור קבוצה X, אז $(P(X), \triangle, \cap)$ הוא חוג בוליאני. בתרגיל בית 1 הוכחתם שכל חוג בוליאני הוא חילופי. ננסה להוכיח את הכיוון ההפוך: כל חוג בוליאני A משוכן בחוג מן הצורה $(P(X), \triangle, \cap)$.

א. הזכרו שהמאפיין של חוג בוליאני הוא 2. לכן לכל $a \in A$ מתקיים $a + a = 0$.

ב. הוכיחו שהשדה היחיד שהוא גם חוג בוליאני הוא $\mathbb{F}_2$.

ג. הוכיחו שלכל אידאל מקסימלי $M \lhd A$ מתקיים $A/M \cong \mathbb{F}_2$.

ד. יהי $M \lhd A$ אידאל מקסימלי ויהי $a \in A$. הוכיחו כי $a \in M$ או $1 - a \in M$, אבל לא שניהם.

ה. יהי $0 \neq a \in A$. הוכיחו שקיים אידאל מקסימלי $M \lhd A$ שאינו מכיל את a.

ו. תהי X קבוצת כל האידאלים המקסימליים של A. הוכיחו שהעתקה $\varphi\colon A \to (P(X), \triangle, \cap)$ השולחת את $a \in A$ לקבוצת כל האידאלים המקסימליים שלא מכילים אותו היא שיכון של חוגים.

בהצלחה!