

אלגברה מופשטת – תרגיל 3

- על התרגיל יש לרשום: שם, תעודת זהות, שם המתרגל.
- יש להגיש את התרגיל **ללא** ניילוניות ו/או קלסרים! אלא בקובץ דפים מהודק מצד ימין!

שאלה 1

- א. הוכיחו שבחבורת הסימטריה S_n כל שני מחזורים זרים מתחלפים זה עם זה.
- ב. הוכיחו שהמחזורים $(12345) \in S_5, (13524)$ מתחלפים, על אף שאינם זרים.
- ג. רשמו את לוח הכפל של החבורה S_3 ומצאו את הסדר של כל איבר.
- ד. בחבורה S_8 מצאו איברים מסדר 4, 7, 12, 15, 19, 20. אם אין איבר מסדר מסויים, הסבירו מדוע.

שאלה 2

- א. הוכיחו ש- $V = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle \leq S_4$ איזומורפית ל- U_8 .
- ב. רשמו את איברי תת החבורה של S_6 הנוצרת על ידי שני האיברים $(145)(263), (15)(36)$.
- הערה: על מנת להיזכר בהגדרה של חבורה שנוצרת על ידי מספר איברים, ראו תרגיל 1.4.24 בחוברת הקורס.

שאלה 3

- א. תנו דוגמא לחבורה סופית G ותת-חבורה H המראות שההתאמה $Hx \rightarrow xH$ אינה בהכרח מוגדרת היטב.
- ב. תנו דוגמא לחבורה (אינסופית) שיש לה תת קבוצה סגורה ביחס לפעולה, שאיננה תת חבורה.

שאלה 4

- תארו את הקוסטים השמאליים של חבורה G לגבי ת"ח H :
- א. $G = 4\mathbb{Z}, H = 12\mathbb{Z}$
- ב. $G = \mathbb{R}^2, H = \{(t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- ג. $G = X_1 \times X_2, H = X_1 \times \{e\}$ (X_1, X_2 חבורות)
- ד. $G = U_{20}, H = \langle 11 \rangle$.

שאלה 5

- רשמו את הקוסטים הימניים והשמאליים של תת החבורות $H = \langle (12) \rangle$, $K = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ בחבורה S_3 .

שאלה 6

הוכיחו את המסקנה הבאה ממשפט לגרנג': תהי G חבורה סופית, ויהיו

$$K \leq H \leq G \text{ ת"ח. אזי } [G : K] = [G : H][H : K].$$

[תרגיל אתגר: הוכיחו את אותה תוצאה כאשר מניחים רק ש- K תת חבורה מאינדקס סופי ב- G . כלומר, מבלי להניח ש- G סופית, ומבלי להניח סופיות

של H].

שאלה 7

א. בעזרת משפט אוילר מצאו את שתי הספרות האחרונות של 1959^{1999} .

ב. בעזרת משפט אוילר מצאו את שתי הספרות האחרונות של

$$8073767^{1999} + 2011.$$

ג. הוכיחו שלכל שני טבעיים n, a מתקיים $n \mid \phi(a^n - 1)$ (כאשר ϕ היא

פונקצית אוילר).

בהצלחה!