

88-195 בדידה – קורס קיץ תשע"ח – מועד א'

מרצים: אחיה בר און, ד"ר אפי כהן, אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר  
מתרגלים: עדי בן צבי, תמר בראון, אריאל ויצמן, ד"ר מיכאל טויטו, עובד נגר, אלעד עטייא  
אורך המבחן: 3 שעות  
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על כל 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 105 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100).
- יש לענות על דפי הבחינה בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטייטה, אך המחברת לא תיבדק כלל

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	

### שאלה 1 (20 נקודות)

א. (8 נק') בנו פסוקים באמצעות הקשרים  $\neg, \wedge$  בלבד, השקולים לפסוקים:

$$p \vee q \quad .i$$

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \quad .ii$$

הערה: ניתן להיעזר בסוגריים ואין צורך להוכיח.

ב. (12 נק') תהיינה קבוצות  $A, B$ , הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = ((A \setminus B) \setminus A) \cup B \quad .i$$

$$P(A) \setminus P(A \setminus B) \supseteq P(A \cap B) \setminus \{\emptyset\} \quad .ii$$

$$P(P(A)) \setminus P(P(B)) = P(P(A \setminus B)) \quad .iii$$

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

## שאלה 2 (20 נקודות)

תהי  $A = P(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$  קבוצת הפונקציות מ  $\mathbb{N}$  ל  $P(\mathbb{N})$ .

נגדיר את  $R$  יחס על  $A$  על ידי  $fRg \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: f(n) \subseteq g(n)$ .

- א. (5 נק') הוכיחו כי  $R$  הינו יחס סדר חלקי.
- ב. (2 נק') האם  $R$  יחס מלא? הוכיחו.
- ג. (3 נק') האם יש איבר גדול ביותר ב  $A$ ?  
אם כן, מצאו אותו והוכיחו שהוא הגדול ביותר.  
אם לא, הוכיחו שאין איבר גדול ביותר.
- ד. (5 נק') תהיי  $X = \{f \in A \mid \forall n \in \mathbb{N}: n \in f(n)\}$ .  
האם יש איבר קטן ביותר ב  $X$ ? (לפי היחס  $R$  שהוגדר קודם)  
אם כן, מצאו אותו והוכיחו שהוא הקטן ביותר.  
אם לא, הוכיחו שאין איבר קטן ביותר.
- ה. (5 נק') תהיי  $D = \{f \in A \mid \forall n \in \mathbb{N}: (f(n) \subseteq f(n+1)) \wedge (f(n) \neq f(n+1))\}$ .  
האם יש איבר קטן ביותר ב  $D$ ? (לפי היחס  $R$  שהוגדר קודם)  
אם כן, מצאו אותו והוכיחו שהוא הקטן ביותר.  
אם לא, הוכיחו שאין איבר קטן ביותר.

דף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

### שאלה 3 (22 נקודות)

- א. (10 נק') תהיינה  $g: A \rightarrow B$ ,  $f: B \rightarrow C$  פונקציות.
- הוכיחו שאם  $f \circ g$  חח"ע, אז  $g$  חח"ע.
  - הוכיחו שאם  $f \circ g$  על, אז  $f$  היא על.
- ב. (12 נק') תהיי  $f: A \rightarrow B$  פונקציה.
- נגדיר ש  $f$  מצטמצמת משמאל אם לכל קבוצה  $C$  ולכל שתי פונקציות  $g, h: C \rightarrow A$ , אם  $f \circ g = f \circ h$  אזי  $g = h$ .
- הוכיחו ש  $f$  מצטמצמת משמאל אם ורק אם  $f$  חח"ע.

דף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

#### שאלה 4 (22 נקודות)

א. (10 נק') קבעו והוכיחו לכל קבוצה אם היא מעוצמת  $2^{\aleph_0}$ ,  $\aleph_0$  או סופית. אם היא סופית רשמו את מספר האיברים בקבוצה.

i.  $A = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

ii.  $B \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$  אוסף הפונקציות העל מהטבעיים לקבוצה  $\{0,1\}$ .

iii.  $C \subseteq P(\mathbb{N})^{\mathbb{Q}}$  אוסף הפונקציות ההפיכות מהרציונליים לקבוצת החזקה של הטבעיים.

ב. (12 נק') תהי  $D \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  אוסף הפונקציות החח"ע מהטבעיים לטבעיים.

i. מצאו פונקציה חח"ע  $h: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow D$  והוכיחו שהיא אכן חח"ע.

ii. היעזרו בסעיף הקודם והוכיחו ש  $|D| = \aleph_0$ .



דף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

**שאלה 5 (21 נקודות)**

א. (11 נק') יהי גרף  $G$  קשיר עם  $|V|=n \geq 2$  קדקודים, כך שכל צלע שנסיר מהגרף תהפוך אותו ללא קשיר. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בגרף יש בדיוק  $|E|=n-1$  צלעות.

ב. (10 נק') תהי פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  הוכיחו או הפריכו:

i. לכל  $A \subseteq \mathbb{N}$  מתקיים כי  $f[\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]] \subseteq \mathbb{N} \setminus A$ .

ii. לכל  $A \subseteq \mathbb{N}$  מתקיים כי  $f[\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]] \supseteq \mathbb{N} \setminus A$ .

דף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

דף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

דף לשאלה מספר \_\_\_\_\_