תרגיל 5

1. הוכיחו שהחוג $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2\rangle$ הוא חוג מקומי.
פתרון:

ראשית נשים לב ש $\langle x\rangle$ הוא אידאל מקסימלי, כי $\mathbb{Q}[x]/\langle x\rangle \cong \mathbb{Q}$. כעת, $\langle x^2\rangle = \langle x\cdot x\rangle = \langle x\rangle\cdot\langle x\rangle = \langle x\rangle^2$. לכן, מתרגיל שעשינו בתרגול, $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2\rangle$ הוא חוג מקומי.

2. הוכיחו: $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2+x\rangle \cong \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$
פתרון:

ראשית, נשים לב ש $\langle x^2+x\rangle = \langle x\rangle\langle x+1\rangle$. כעת, קל לראות ש$\langle x\rangle$ ו$\langle x+1\rangle$ הם אידיאלים קומקסימליים ($1 = x+1+(-x)$). לכן $\langle x\rangle\langle x+1\rangle = \langle x\rangle\cap\langle x+1\rangle$. מכאן אפשר להשתמש במשפט השאריות הסיני:

$$\mathbb{Q}[x]/\langle x^2+x\rangle = \mathbb{Q}[x]/\langle x\rangle\langle x+1\rangle = \mathbb{Q}[x]/\langle x\rangle\cap\langle x+1\rangle \cong (\mathbb{Q}[x]/\langle x\rangle)\times(\mathbb{Q}[x]/\langle x+1\rangle)$$

לבסוף, כמו שכבר הראנו בעבר, $\mathbb{Q}[x]/\langle x\rangle \cong \mathbb{Q}$ ובאופן דומה $\mathbb{Q}[x]/\langle x+1\rangle \cong \mathbb{Q}$.
לכן, $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2+x\rangle \cong \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

3. הוכיחו/הפריכו: אם R חוג מקומי, אז לכל $I \trianglelefteq R$, R/I הוא חוג מקומי.
הוכחה:

נסמן בM את האידיאל המקסימלי היחיד של R. ברור ש$I \subseteq M$. לכן M/I הוא אידאל של R/I. ממשפט ההתאמה, כל אידיאל בחוג מנה הוא מהצורה J/I כאשר $I \subseteq J \trianglelefteq R$. ההתאמה שומרת על הכלות. נניח שיש בR/I אידיאל מקסימלי נוסף. הוא מהצורה J/I כך ש$I \subseteq J \trianglelefteq I$. אבל M הוא המקסימלי היחיד של R, ולכן $J \subseteq M$. גורר ש$J/I \subseteq M/I$. סתירה.

4. יהי R חוג לא בהכרח קומוטטיבי, ויהיו I, J אידיאלים קומקסימליים. הוכיחו: $I\cap J = IJ+JI$.
הוכחה:

$\supseteq$: $IJ \subseteq I, J$ מתכונת הבליעה, ולכן $IJ \subseteq I\cap J$. באופן דומה, $JI \subseteq I\cap J$. לבסוף, $I\cap J$ הוא אידיאל ולכן סגור לסכומים, מכאן: $IJ+JI \subseteq I\cap J$.

$\subseteq$: קיימים $x\in I, y\in J$ כך ש$1 = x+y$. יהי $z \in I\cap J$.

$$z = z\cdot 1 = z(y+x) = zy+zx \in IJ+JI$$

5. מצאו $x \in \mathbb{Z}$ שמקיים:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 2 \mod 7 \\ x \equiv 10 \mod 11 \end{cases}$$

פתרון:

ראשית נמצא x שפותר את שתי המשוואות הראשונות. ובכן, $1 = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5$. לכן $x = 1 \cdot 21 + 2 \cdot (-20) = -19$. נוסיף 35 כדי לקבל מספר חיובי. $x = 16$.

כעת, נפתור את המערכת החדשה:

$$\begin{cases} x \equiv 16 \mod 35 \\ x \equiv 10 \mod 11 \end{cases}$$

ובכן, מאלגוריתם אוקלידס נקבל: $1 = 16 \cdot 11 - 5 \cdot 35$.

לכן, $x = 16 \cdot 16 \cdot 11 - 10 \cdot 5 \cdot 35$.

6. יהי R חוג קומוטטיבי שמכיל אידמפוטנט לא טריוויאלי. הוכיחו שR אינו חוג מקומי.

הוכחה:

יהי $e \in R$ אידמפוטנט. בפרט, e אינו הפיך, ולכן Re הוא אידאיל אמיתי. כל אידיאל אמיתי מוכל באידיאל מקסימלי. כלומר, קיים אידאיל מקסימילי, נקרא לו M_e, שמכיל את e. אבל $1 - e$ הוא גם אידמפוטנט, ולכן קיים אידאיל מקסימלי M_{1-e} שמכיל את $1 - e$. אם $M_e = M_{1-e}$, אז האידיאל מכיל גם את $e + (1-e) = 1$, בסתירה לכך שהוא אמיתי. (אידיאל מקסימלי מוגדר להיות אידיאל אמיתי). לכן M_e וM_{1-e} הם אידיאלים מקסימליים שונים.