תרגיל לינארית - מרחבי מכפלה פנימית

18 בדצמבר 2012

1 מרחב מכפלה פנימית

הגדרה 1.1 יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. פונקציה $\langle\ \rangle : V\times V\mapsto\mathbb{F}$ נקראת מרחב מכפלה פנימית אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. לינאריות ברכיב הראשון: $\langle\alpha v+w,u\rangle=\alpha\langle v,u\rangle+\langle w,u\rangle$.
2. הרמיטיות: $\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$.
3. אי־שליליות: לכל $v\in V$, $\langle v,v\rangle\geq0$ ויש שוויון אם ורק אם $v=\bar{o}$.

תרגיל: תהי $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$. הוכח: $\langle v,u\rangle=v^tAu$ הוא מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

פתרון: נבדוק שמתקיימים שלושת התנאים:

1. $\langle\alpha v_1+\beta v_2,u\rangle=\alpha v_1^tAu+\beta v_2^tu=\alpha\langle v_1,u\rangle+\beta\langle v_2,u\rangle$
2. ב $\mathbb{R}$, $x=\bar{x}$ לכן צריך להראות $\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle$. $\langle v,u\rangle$הוא סקלר, לכו מתקיים $\langle v,u\rangle=\langle v,u\rangle^t$.

   $$\langle v,u\rangle=\langle v,u\rangle^t=\left(v^tAu\right)^t=u^tA^tv\,.$$

   אבל A הוא היא מטריצה סימטרית, ולכן מתקיים $u^tA^tv=u^tAv=\langle v,u\rangle$.
3. נסמן $v=(v_1,v_2)$. ואז מתקבל

$$\begin{aligned}\langle v,v\rangle &= (v_1,v_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=(v_1,v_2)\begin{pmatrix}v_1+v_2\\v_1+2v_2\end{pmatrix}=v_1\left(v_1+v_2\right)+v_2\left(v_1+2v_2\right)=\\ &= v_1^2+2v_1v_2+2v_2^2=\left(v_1+v_2\right)^2+v_2^2\geq0.\end{aligned}$$

קל לראות, שיש שוויון אם ורק אם $v_1=v_2=0$.

תזכורת: עבור $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ מגדירים $A^*=\bar{A}^t$.

תרגיל: הוכח שפונקציה $\langle A,B\rangle=tr(AB^*)$ היא מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}^{m\times n}$.

פתרון: נבדוק שמתקיימות שלושת התכונות:

1. $\langle\alpha A_1+A_2,B\rangle=tr\left(\left(\alpha A_1+A_2\right)B^*\right)=\alpha tr\left(A_1B^*\right)+tr\left(A_2B^*\right)=\alpha\langle A_1,B\rangle+\langle A_2,B\rangle$.

2. נציין ש $tr(A) = tr\left(A^t\right)$. מתקיים

$$\langle B, A\rangle = tr\left(BA^*\right) = tr\left(B\bar{A}^t\right) = tr(\bar{A}B^t) = \overline{\langle A\bar{B}^t\rangle} = \overline{\langle A, B\rangle}$$

3.

$$\begin{aligned}\langle A, A\rangle &= tr\left(AA^*\right) = \sum_{i=1}^{m} R_i\left(A\right) C_i\left(A^*\right) = \sum_{i=1}^{m} R_i\left(A\right) C_i\left(\bar{A}^t\right) = \Sigma_{i=1}^{m} R_i(A)\overline{R_i^t\left(A\right)} = \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2 \geq 0\end{aligned}$$

קל לראות שוב, שיש שוויון אם ורק אם $a_{ij} = 0$ לכל i, j.

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. הוכח שהטענות הבאות שקולות:

1. $\langle v, u\rangle = v^t Au$ היא מכפלה פנימית
2. $a_{11} > 0, a_{22} > 0, |A| > 0$.

פתרון: $1 \Leftarrow 2$. ראשית, מתקיים $\langle v, u\rangle = v^t Au = u^t Av = \langle u, v\rangle$ לכל v, u ופרט ל $u = (0,1)$, $v = (1,0)$.
מתקיים $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{21}$ $(0,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $(1,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{12}$. לכן המטריצה סימטרית.

מכיוון שהמטריצה סימטרית, נסמן אותה ב $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d\end{pmatrix}$. לכל $0 \neq v \in V$ ובפרט ל $(0,1), (1,0)$ מתקיים: $0 < \langle v, v\rangle$. על ידי חישוב ישיר מקבלים $0 < a$,$0 < b$. נראה ש $detA = ad - b^2 > 0$. יהי וקטור כלשוה $(v_1, v_2) = v \neq \bar{0}$. אזי

$$(v_1,\, v_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix} = av_1^2 + 2bv_1v_2 + dv_2^2 > 0.$$

נניח ש $v_2 \neq 0$ ונחלק ב v_2^2. נציב $x = \frac{v_1}{v_2}$ ונקבל $ax^2 + 2bx + d > 0$ לכל x. זה ייתכן אם ורק אם $4b^2 - 4ad < 0$ או במלים אחרות $ad - b^2 > 0$.

$2 \Leftarrow 1$.

$$\begin{aligned}A &= A^t \Rightarrow \langle v, u\rangle = (v_1, v_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2, bv_1 + dv_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix} = \\ &= av_1u_1 + bv_2u_1 + bv_1u_2 + dv_2u_2 = (au_1 + bu_2, bu_1 + bu_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix} = \\ &= (v_1, v_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

לינאריות ברכיב הראשון נכונה לכל מטריצה. לכן נותר להראות ש $\langle v, v\rangle > 0$ לכל $v \neq 0$. מתקיים

$$(v_1, v_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2\end{pmatrix} = av_1^2 + 2bv_1v_2 + dv_2^2$$

נתון ש $a, d > 0;\ ad - b^2 > 0$. לכן יש לנו משוואה ריבועית ביחס ל $\frac{v_1}{v_2}$ או $\frac{v_2}{v_1}$ שאף פעם לא מתאפסת. וברור שאם $v = 0$, $\langle v, v\rangle = 0$. מש"ל.

הגדרה 1.2 מרחב וקטורי V, יחד עם מכפלה פנימית $\langle\ \rangle : V\times V\mapsto V$ נקרא מרחב מכפלה פנימית.

תרגיל: יהי V מרחב מכפלה פנימית n־מימדי. יהיו $v_1,\dots v_n\in V$. תהי $A=(\langle v_i,v_j\rangle)$. הוכח $\det A=0$ אם ורק אם $v_1,\dots v_n$ תלויים לינארית.

פתרון: מתקיים $C_j(A)=\begin{pmatrix}\langle v_1,v_j\rangle\\ \vdots\\ \langle v_n,v_j\rangle\end{pmatrix}$. לכל בחירה של α_j, $j=1,\dots n$ מתקיים:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j C_j(A)=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle v_1,v_j\rangle\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle v_n,v_j\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle v_1,\Sigma\bar{\alpha_j}v_j\rangle\\ \vdots\\ \langle v_n,\Sigma\bar{\alpha}_jv_j\rangle\end{pmatrix}$$

(המעבר האחרון נכון מלינאריות ברכיב השני).

נניח ש $\det A=0$. אזי קיימים α_j, $j=1,\dots n$, לא כולם 0, כך ש $\begin{pmatrix}\langle v_1,\Sigma\bar{\alpha}_jv_j\rangle\\ \vdots\\ \langle v_n,\Sigma\bar{\alpha}_jv_j\rangle\end{pmatrix}=0$. זאת אומרת $\langle v_i,\sum\bar{a}_jv_j\rangle=0$ לכל i. אזי $0=\langle\sum\bar{\alpha}_iv_i,\sum\bar{\alpha}_jv_j\rangle=\sum_i\bar{\alpha}\langle v_i,\sum\bar{\alpha}_jv_j\rangle\Leftrightarrow\sum\bar{\alpha}_iv_i=0\Leftrightarrow v_i$ תלויים לינארית.

2 נורמה ואורתוגונליות

הגדרה 2.1 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}\vee\mathbb{F}=\mathbb{R}$ פונקציה $\|\ \|:V\mapsto\mathbb{R}$ נקראת נורמה אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. אי שליליות: $\|v\|\geq 0$ ויש שוויון אם ורק אם $v=0$.
2. הומוגניות: לכל $v\in V,\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\|\alpha v\|=\alpha\|v\|$.
3. אי־שוויון המשולש: $\|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$.

(אינטואיטיבית, הנורמה מודדת את האורך של הוקטורים)

הגדרה 2.2 מרחב וקטורי שמוגדרת עליו נורמה נקרא מרחב נורמי.

משפט 2.3 יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ הוא נורמה על V. נורמה זו נקראת נורמה המושרית על ידי מכפלה פנימית.

דוגמה: $\mathbb{C}^n$ יחד עם המכפלנ הפנימיתת הסטנדרטית $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$משרים את הנורמה $\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$.

הגדרה 2.4 יהי V מרחב נורמי. $v\in V$ נקרא נורמלי עם $\|v\|=1$. כל וקטור פרט לוקטור ה0 ניתן לנרמל על ידי $v\mapsto\frac{v}{\|v\|}$.

דוגמה: נרמל את הוקטיר $(3,4)\in\mathbb{R}^2$, כאשר הנורמה היא הנורמה שמושרית ממכפלה פנימית הסטנדרטית.

פתרון: $\|(3,4)\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. לכן הוקטור המנומרל יהיה $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

הגדרה 2.5 יהי V מחרב מכפלה פנימית. וקטורים $u,v\in V$ נקראים אורתוגונליים או מאונכים אם $\langle u,v\rangle=0$.

הגדרה 2.6 קבוצה של וקטורים $\{v_1, \ldots, v_m\}$נקראת אורתוגונלית אם לכל זוג של וקטורים שונים זה מזה v_i, v_j מתקיים $\langle v_i, v_j\rangle = 0$.

דוגמה: $\{(1,1),(1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ היא קבוצה אורתוגונלית.

הגדרה 2.7 קבוצה אורתונורמלית $\{v_1, \ldots, v_m\}$ נקראת אורתונורמלית אם לכל i, $\|v_i\| = 1$.

דוגמה: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\} \subset \mathbb{R}^2$ היא מערכת אורתונורמית.

דוגמה: הבסיס הסטנרטי של $\mathbb{C}^n$ הוא קבוצה אורתונורמלית ביחס למפכלה הפנימית הסטנרטית.

משפט 2.8 כל קבוצה אורתוגונלית היא בלתי תלוייה לינארית.

תרגיל: הוכח/הפרך: כל קבוצה אורתוגונלית של וקטורים היא בלתי תלוייה לינארית.

פתרון: הרפכה: $\{(1,1),(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ היא קבוצה אורתונורמלית אבל תלוייה לינארית מכיוון שהיא מכילה את 0.

הגדרה 2.9 יהי V מרחב וקטורי. קבוצה אורתונורמלית פורשת נקראת בסיס אורתונורמלי של V.

תרגיל: מצא בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{C}^{n\times n}$ יחד עם המכפלה הפנימית $\langle A, B\rangle = tr(AB^*)$

פתרון: $\{E_{ij}\}$ קבוצת המטריצות האלמנטריות עם 1 ברכיב i, j ו 0 בשאר היא קבוצה כזו, מכיוון שמתקיים:

1. $\langle E_{ij}, E_{kl}\rangle = tr(E_{ij}E_{kl}^*) = tr(E_{ij}E_{kl}^t) = tr(E_{ij}E_{lk}) = tr(\delta_{ik}E_{jl}) = \delta_{ik}\delta_{jl}$. לכן הקבוצה היא אורתונורמלית.
2. הקבוצה היא בלתי תלוייה מכיוון שהיא אורתונרומלית, ופורשת מכיוון שיש בה n^2 איברים.

הערה 2.10 בהמשך נראה אלגוריתם למציאת בסיס אורתונורמלי לכל מרחב וקטורי ממימד סופי.