פתרון תרגיל בית מספר 6

שאלה 1

א) תהי $f:X\to Y$.

1) נניח ש $f:X\to Y$ פתוחה ונוכיח ש $f:X\to f(X)$ פתוחה. תהי U פתוחה ב- X . מההנחה מתקיים $f(U)$ פתוחה ב Y . מתקיים $f(U)\subseteq f(X)$ ולכן $f(U)=f(U)\cap f(X)$. מכיון ש $f(U)$ פתוחה ב Y וכן $f(U)=f(U)\cap f(X)$ נקבל עפ"י הגדרת טופולוגית תת מרחב ש $f(U)$ פתוחה ב $f(X)$.

2) ההוכחה של המקרה שבן נתון ש $f:X\to Y$ סגורה וצ"ל ש $f:X\to f(X)$ סגורה, דומה מאד להוכחה של סעיף א. רק בשלב הסופי יש להיעזר בתרגיל בית שמדבר על אפיון קבוצה סגורה בטופולוגית תת מרחב.

ב) 1) דוגמא נגדית לעובדה שמכך ש- $f:X\to f(X)$ פתוחה לא נובע ש- $f:X\to Y$ פתוחה .

יהיו $Y=\mathbb{R},\quad X=\mathbb{Z}$ ו $f=i$ העתקת ההכלה. כלומר $f(x)=x$. ברור ש $f(X)=\mathbb{Z}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ פתוחה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Z}$ על $\mathbb{Z}$. אבל, $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי למשל $\mathbb{Z}$ פתוחה ב $\mathbb{Z}$ אבל $i(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

2) דוגמא נגדית שניה: $f:X\to f(X)$ סגורה ו- $f:X\to Y$ אינה סגורה.

יהיו $Y=\mathbb{R},\quad X=\mathbb{Q}$ ו- $f=i$ העתקת ההכלה כלומר $f(x)=x$. ברור ש $f(X)=\mathbb{Q}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ סגורה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Q}$ על $\mathbb{Q}$. מצד שני $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה סגורה כי למשל $\mathbb{Q}$ סגורה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

<u>הערה</u>: דוגמא נגדית 2 היתה יכולה לשמש גם כדוגמא נגדית לסעיף 1) שכן הפונקציה $i:\mathbb{Q}\to i(\mathbb{Q})$ היא גם פתוחה והפונקציה $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי $\mathbb{Q}$ פתוחה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

שאלה 2

א) הפונקציה <u>לא רציפה</u> שכן אינה רציפה ב-0. ניתן להוכיח למשל עפ"י היינה $\frac{1}{n}\to 0$ אבל $f_1\left(\frac{1}{n}\right)=n\not\to 1=f_1(0)$.

הפונקציה <u>אינה פתוחה</u> כי למשל $(-1,1)$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1((-1,1))=[1,\infty)$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>אינה סגורה</u> כי למשל $[0,\infty)$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1([0,\infty))=\{1\}\cup(0,\infty)=(0,\infty)$ ו- $(0,\infty)$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

ב) הפונקציה <u>לא רציפה</u>. ניתן להוכיח זאת למשל ע"י כך ש $\{1\}$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2^{-1}(\{1\})=\mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>אינה פתוחה</u>: $\mathbb{R}$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2(\mathbb{R})=\{0,1\}$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>סגורה</u>: לכל $A\subseteq\mathbb{R}$ (ובפרט עבור A סגורה) $f_2(A)$ סגורה. אמנם, אם $A=\varnothing$ נקבל $f_2(A)=\varnothing$. אם $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A)=\{1\}$. אם $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A)=\{0\}$ ובכל מקרה אחר נקבל $f_2(A)=\{0,1\}$.

ג) הפונקציה <u>רציפה</u> שכן היא מוגדרת באמצעות שתי הפונקציות הבאות: $h(x)=1$, $h:[2,3]\to\mathbb{R},$ $g(x)=x$, $g:[4,5)\to\mathbb{R},$. שתי הפונקציות רציפות (h פונקציה קבועה ו- g פונקציית ההכלה). $\{[2,3],[4,5)\}$ כיסוי פתוח ל X (למעשה $[2,3]$ וכן $[4,5)$ אפילו סגוחות ב X (בדקו!)). $[2,3]\cap[4,5)=\varnothing$. לכן מתקיימים תנאי המשפט שמבטיח רציפות של f_3 .

הפונקציה <u>לא פתוחה</u> ו<u>לא סגורה</u> שכן $[4,5)$ סגוחה ב X אבל $f_3([4,5))=[4,5)$ לא פתוחה ולא סגורה ב $\mathbb{R}$.

שאלה 3

אם X סופי אז הטופולוגיה הקו סופית היא בדיוק הטופולוגיה הדיסקרטית כי כל תת קבוצה סופית ולכן סגורה. (מה שאומר שגם כל תת קבוצה פתוחה). טופולגיה זו קשירה אם ורק אם ב X איבר אחד (אם יש יותר מאיבר אחד אז $X=\{x\}\cup(X-\{x\})$ ולכן X לא קשיר).

נראה שאם X אינסופי המרחב קשיר. אחרת, קיימת ב X תת קבוצה סגוחה לא טריוויאלית A .

אם A סגורה ושונה מ X הרי ש A סופית. אם A פתוחה ולא ריקה הרי ש A^c סופית. מכאן $X = A \cup A^c$ סופי וזו סתירה.

מסקנה: X קשיר אם הוא אינסופי או בעל איבר אחד ולא קשיר אם הוא סופי בעל יותר מאיבר אחד.

<u>שאלה 4</u>

נוכיח שהקבוצה $[a,b)$ סגוחה.

היא פתוחה מההגדרה של הטופולוגיה.

סגורה: נראה שהמשלים פתוח: $\left[a,b\right)^C = \left(-\infty,a\right) \cup \left[b,\infty\right) = \left(\bigcup_{d<a}\left[d,a\right)\right) \cup \left(\bigcup_{b<c}\left[b,c\right)\right)$

<u>שאלה 5</u>

B אינו תת מרחב קשיר.

נניח בשלילה ש B כן תת מרחב קשיר של $\mathbb{R}^2$. תהי $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקצית ההטלה על הרכיב הראשון. ראינו כי היא רציפה ולכן גם הפונקציה המתקבלת ע"י צמצום התחום רציפה. כלומר $p_1|_B : B \to \mathbb{R}$ רציפה. פונקציה רציפה מעבירה מרחב קשיר למרחב קשיר ומכאן $p_1\left(B\right) = (2,3) \cup (5,8)$ קשיר , אך ברור ש $(2,3) \cup (5,8)$ אינו ת"מ קשיר של $\mathbb{R}$ ומכאן הסתירה.

<u>שאלה 6</u>

נראה קודם דוגמא נגדית במרחב מטרי שאינו נורמי: נבחר $X = \{a,b\}$ עם המטריקה הדיסקרטית: $d\left(a,b\right)=1$. אזי נבחר את הכדור הפתוח $B\left(a,1\right)$ ומתקיים $B\left(a,1\right) = \{a\}$ ולכן סגור.

שימו לב: שסגור של קבוצה סגורה הוא הקבוצה עצמה ולכן $cl\left(B\left(a,1\right)\right) = cl\left(\{a\}\right) = \{a\}$ (כמו כן, יכולתם לראות שזה הסגור דרך הקריטריון של הסדרות). מאידך, $B\left[a,1\right] = \{a,b\}$.

כעת נוכיח את הטענה במרחב נורמי:

נוכיח הכלה דו כיוונית:

$cl(B(a,r)) \subseteq B[a,r]$ - שימו לב שהכלה זו נכונה בכל מרחב מטרי, לאו דווקא מרחב נורמי. מתקיים $B(a,r) \subseteq B[a,r]$, הוכחתם ש- $B[a,r]$ היא קבוצה סגורה בכל מרחב מטרי ולכן $cl(B(a,r)) \subseteq B[a,r]$.

$cl(B(a,r)) \supseteq B[a,r]$ - שימו לב שהכלה זו אינה נכונה בכל מרחב מטרי (ראו דוגמא נגדית) אך כן נכונה בכל מרחב נורמי. יהי $x \in B[a,r]$ ונראה שיש סדרה ב- $B(a,r)$ שמתכנסת אליו.

<u>מוטיבציה לבחירת הסדרה</u>: $x \in B[a,r]$ ולכן $\|x-a\| \le r$ ואז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)\right\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-a\| < r$. ז"א, אנחנו מחפשים סדרה $\{y_n\}$ כך ש- $y_n - a = \left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)$ ואז יהי מובטח ש- $y_n \in B(a,r)$. מהעברת אגפים נקבל את הסדרה:

$B(a,r) \supseteq \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)x+\frac{a}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{y_n\}$. מתקיים $y_n \to x$ שכן:

$$\|y_n - x\| = \left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)\right\| = \left(\frac{1}{n}\right)\|x-a\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\left(\left(\frac{1}{n}\right) \to 0, \|x-a\| \le r\right)$$

<u>שאלת בונוס</u>

נראה שתי דוגמאות:

1. פונקצית הערך השלם $f:(\mathbb{R},T_{sorgenfrey}) \to (\mathbb{R},|\cdot|)$. אפשר בקלות להוכיח שהיא רציפה. היא לא פתוחה כי למשל $f([2,3)) = \{2\}$. עם זאת היא סגורה. על מנת לראות זאת, שימו לב שתמונתה של כל תת קבוצה ב- $(\mathbb{R},T_{sorgenfrey})$ היא תת קבוצה של $\mathbb{Z}$. בתרגול ראינו ש- $\mathbb{Z}$ סגורה ב- $(\mathbb{R},|\cdot|)$, ובאותו אופן ניתן להראות שכל תת קבוצה של $\mathbb{Z}$ סגורה שם.
2. פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$.