תרגיל 4

להגשה בשבוע שמתחיל ב 3.4.2016

1. יהא Vמ"ו מימד n ותהא $T:V\to V$ ה"ל המקיימת כי $T^3=0$. נניח שקיים $v\in V$ כך ש $T^2(v)\neq 0$ הוכיחו כי

   (א) $Im(T^2)\subseteq \ker T$

   (ב) הקבוצה $\left\{v,Tv,T^2v\right\}$בת"ל

2.

   (א) יהא V,W מ"ו ויהיו $v_1,\ldots,v_n\in V$ ו $T:V\to W$ ה"ל. הוכיחו כי $span\left\{Tv_1,\ldots,Tv_n\right\}=T\left(span\left\{v_1,\ldots,v_n\right\}\right)$

   (ב) יהא $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ ויהא $W=span\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\right\}\leq\mathbb{R}^{2\times 2}$ מצאו ה"ל $T:V\to V$ כך ש

$$ImT=\ker T=W$$

3.

   (א) יהיו V,W מ"ו מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. נסמן $\dim V=n,\dim W=m$. אזי

      i. $n\leq m$ אמ"מ קיימת ה"ל $T:V\to W$ חח"ע (ולכן למשל לא קיימת הע"ל חח"ע $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$)

      ii. $n\geq m$ אמ"מ קיימת ה"ל $T:V\to W$ על (ולכן למשל לא קיימת הע"ל על $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$)

      iii. $n=m$ אמ"מ קיימת ה"ל $T:V\to W$ חח"ע ועל. במקרה זה מסמנים $V\cong W$ והמינוח הוא " V,W איזומורפי

   סעיף זה אינו שאלה שצריך לענות עליה אבל ודאו כי אתם יודעים להוכיח את הטענות. הרעיון בכל שלושת הטענות: נבחר בסיס $\{v_1\ldots v_n\}$ ל V. נבחר בסיס$\{w_1\ldots w_m\}$ ל W. לפי משפט ההגדרה ניתן להגדיר ה"ל $T:V\to W$ ע"י קביעה ?$Tv_i=$ לכל $1\leq i\leq n$. לכן אם $n\leq m$ אזי נוכל להגדיר $Tv_i=w_i$לכל $1\leq i\leq n$. אם $n\geq m$ אזי נוכל להגדיר $Tv_i=w_i$לכל $1\leq i\leq m$ ולכל שאר v_i עם $m+1\leq i\leq n$ נגדיר שרירותית $Tv_i=0$

   (ב) נגדיר $V=span\left\{2+x,1+x\right\}\leq\mathbb{R}_2[x]$ ו $W=span\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\right\}\leq\mathbb{R}^{2\times 2}$. מתקיים כי $\dim V=$ $\dim W=2$ ולכן לפי המשפט קיימת ה"ל $T:V\to W$ חח"ע ועל. מצאו T כזאת מפורשות. וחשבו

$$T(1+x),T(3+2x),T(x)$$

4. תהא $T : V \to V$

(א) ודאו כי הינכם יודעים להוכיח כי (אין צורך לכתוב את התשובה) $\ker T \subseteq \ker T^2$ וגם $Im(T^2) \subseteq Im(T)$

(ב) הוכיחו כי הבאים שקולים

i. $\ker T = \ker T^2$

ii. $Im(T) = Im(T^2)$

היעזרו במשפט הדרגה (פעם עבור T ופעם עבור T^2). זיכרו כי אם $W \leq V$ (כלומר W תת מרחב של V) מאותו מימד אזי הם שווים ($V = W$)

הערה: גם

iii. $\ker T \oplus Im(T) = V$

שקול לקודמים אבל לשם קיצור התרגיל ־ הוכיחו כי (א) גורר (ג) [אנחנו מוותרים לכם על הכיוון (ג) גורר (א) אבל כדאי שתדעו להוכיח זאת]

תזכורת: משפט המימדים: יהיו W_1, W_2 שני תתי מרחבים אזי מתקיים כי $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. ייתכן שיותר קל להתחיל להוכיח כי $\ker T \cap Im(T) = \{0\}$ ואז $\ker T + Im(T) = V$

בהצלחה!