מתמטיקה לכימאים פתרון תרגיל 7

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל 1. פתרו את המד"רים שנמצאים בסעיפים האי-זוגיים

1. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t) = -2 \\ g(t) = t^2 e^{2t} \end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int p(t)dt} = \\ &= e^{\int -2dt} = e^{-2t} \end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t) = e^{-2t}$ ונקבל

$$\begin{gathered} y' - 2y = t^2 e^{2t} \\ \Downarrow \\ e^{-2t}y' - 2e^{-2t}y = t^2 \\ \Downarrow \\ \left[e^{-2t}y\right]' = t^2 \\ \Downarrow \\ e^{-2t}y = \int t^2 dt \\ \Downarrow \\ e^{-2t}y = \frac{t^3}{3} + C \\ \Downarrow \\ y = \frac{t^3 e^{2t}}{3} + Ce^{2t} \end{gathered}$$

2. $y' + y = te^{-t} + 1$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t) = 1 \\ g(t) = te^{-t} + 1 \end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int p(t)dt} = \\ &= e^{\int 1dt} = e^{t} \end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t) = e^t$ ונקבל

$$\begin{gathered} y' + y = te^{-t} + 1 \\ \Downarrow \\ e^t y' + e^t y = t + e^t \\ \Downarrow \\ \left[e^t y\right]' = t + e^t \\ \Downarrow \\ e^t y = \int \left(t + e^t\right) dt \\ \Downarrow \\ e^t y = \frac{t^2}{2} + e^t + C \\ \Downarrow \\ y = \frac{t^2}{2e^t} + 1 + \frac{C}{e^t} \end{gathered}$$

3. $y' - 2y = 3e^t$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t) = -2 \\ g(t) = 3e^t \end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int p(t)dt} = \\ &= e^{\int -2dt} = e^{-2t} \end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t) = e^{-2t}$ ונקבל

$$\begin{gathered} y' - 2y = 3e^t \\ \Downarrow \\ e^{-2t} y' - 2e^{-2t} y = 3e^{-t} \\ \Downarrow \\ \left[e^{-2t} y\right]' = 3e^{-t} \\ \Downarrow \\ e^{-2t} y = \int 3e^{-t} dt \\ \Downarrow \\ e^{-2t} y = -3e^{-t} + C \\ \Downarrow \\ y = -3e^t + Ce^{2t} \end{gathered}$$

4. $y' + 2ty = 2te^{2t^2}$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t) = 2t \\ g(t) = 2te^{2t^2} \end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int p(t)dt} = \\ &= e^{\int 2tdt} = e^{t^2} \end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t) = e^{t^2}$ ונקבל

$$
\begin{gathered}
y' + 2ty = 2te^{2t^2} \\
\Downarrow \\
e^{t^2}y' - 2e^{-2t}y = 3e^{-t} \\
\Downarrow \\
\left[e^{-2t}y\right]' = 3e^{-t} \\
\Downarrow \\
e^{-2t}y = \int 3e^{-t}dt \\
\Downarrow \\
e^{-2t}y = -3e^{-t} + C \\
\Downarrow \\
y = -3e^{t} + Ce^{2t}
\end{gathered}
$$

.5 $ty' - y = t^2e^{-t}$

פתרון. אם נביא את המשוואה לצורה הרגילה נקבל ש-

$$
\begin{gathered}
ty' - y = t^2e^{-t} \\
\Downarrow \\
y' - \frac{1}{t}y = te^{-t}
\end{gathered}
$$

מכאן שבתרגיל

$$
\begin{cases}
p(t) = -\frac{1}{t} \\
g(t) = te^{-t}
\end{cases}
$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$
\begin{aligned}
\mu(t) &= e^{\int p(t)dt} &= \\
&= e^{\int -\frac{1}{t}dt} &= e^{t^2} \\
&= e^{-\ln t} &= \frac{1}{t}
\end{aligned}
$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t) = \frac{1}{t}$ ונקבל

$$
\begin{gathered}
y' - \frac{1}{t}y = te^{-t} \\
\Downarrow \\
\frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = e^{-t} \\
\Downarrow \\
\left[\frac{1}{t}y\right]' = e^{-t} \\
\Downarrow \\
\frac{1}{t}y = \int e^{-t}dt \\
\Downarrow \\
\frac{1}{t}y = -e^{-t} + C \\
\Downarrow \\
y = -te^{t} + Ct
\end{gathered}
$$

.6 $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t) = \frac{2}{t} \\ g(t) = \frac{\cos t}{t^2} \end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int p(t)dt} &=& \\ &= e^{\int \frac{2}{t}dt} &=& e^{t^2} \\ &= e^{2\ln t} &=& t^2 \end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t) = t^2$ ונקבל

$$\begin{gathered} y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2} \\ \Downarrow \\ t^2y' + 2ty = \cos t \\ \Downarrow \\ \left[t^2y\right]' = \cos t \\ \Downarrow \\ t^2y = \int \cos t dt \\ \Downarrow \\ t^2y = \sin t + C \\ \Downarrow \\ y = \frac{\sin t}{t^2} + \frac{C}{t^2} \end{gathered}$$

7. $y' + y = te^{-t} + 1$ בעזרת ווריאצית הפרמטרים

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t) = 1 \\ g(t) = te^{-t} + 1 \end{cases}$$

כעת נחשב את $A(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} A'(t) &= g(t)e^{\int p(t)dt} &=& \\ &= \left(te^{-t} + 1\right)e^{\int 1dt} &=& t + e^t \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} A(t) &= \int A'(t)\,dt &=& \\ &= \int t + e^t dt &=& \frac{t^2}{2} + e^t + C \end{aligned}$$

מכאן שהפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned} y &= A(t)e^{\int -p(t)dt} &=& \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + e^t + C\right]e^{\int -1dt} &=& \left[\frac{t^2}{2} + e^t + C\right]e^{-t} \end{aligned}$$

8. $y' - 2y = 3e^t$ בעזרת ווריאצית הפרמטרים

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t) = -2 \\ g(t) = 3e^t \end{cases}$$

כעת נחשב את $A(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} A'(t) &= g(t)\, e^{\int p(t)dt} = \\ &= 3e^t e^{\int -2dt} = 3e^{-t} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} A(t) &= \int A'(t)\, dt = \\ &= \int 3e^{-t} dt = -3e^{-t} + C \end{aligned}$$

מכאן שהפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned} y &= A(t)\, e^{\int -p(t)dt} = \\ &= \left[-3e^{-t} + C\right] e^{\int 2dt} = \left[-3e^{-t} + C\right] e^{2t} \end{aligned}$$

.9 $y' = \frac{x^2}{y}$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{x^2}{y} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \\ \Downarrow \\ ydy = x^2 dx \\ \Downarrow \\ \int ydy = \int x^2 dx \\ \Downarrow \\ \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C \end{gathered}$$

.10 $y' + y^2 \sin(x) = 0$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' + y^2 \sin(x) = 0 \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = -y^2 \sin(x) \\ \Downarrow \\ -y^{-2} dy = \sin(x)\, dx \\ \Downarrow \\ \int -y^{-2} dy = \int \sin(x)\, dx \\ \Downarrow \\ \frac{1}{y} = -\cos(x) + C \end{gathered}$$

.11 $y' = \frac{3x^2-1}{3+2y}$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{3x^2-1}{3+2y} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-1}{3+2y} \\ \Downarrow \\ 3+2ydy = 3x^2-1dx \\ \Downarrow \\ \int 3+2ydy = \int 3x^2-1dx \\ \Downarrow \\ 3y+y^2 = x^3-x+C \end{gathered}$$

.12 $y' = \frac{x^2}{1+y^2}$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{x^2}{1+y^2} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2} \\ \Downarrow \\ 1+y^2dy = x^2dx \\ \Downarrow \\ \int 1+y^2dy = \int x^2dx \\ \Downarrow \\ y+\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3}+C \end{gathered}$$

.13 $\left(2xy^2+2y\right)+\left(2x^2y+2x\right)y' = 0$

פתרון. ראשית זהה את הפונקציות M,N שהן

$$\begin{cases} M(x,y) = 2xy^2+2y \\ N(x,y) = 2x^2y+2x \end{cases}$$

כדי שהמשוואה תהיה מדוייקת צריך להתקיים

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y)$$

ואכן

$$M'_y(x,y) = 4x+2 = N'_x(x,y)$$

כעת נחפש פונקציה $\Psi(x,y)$כך ש-

$$\begin{cases} \Psi_x(x,y) = M(x,y) & = & 2xy^2+2y \\ \Psi_y(x,y) = N(x,y) & = & 2x^2y+2x \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ש-

$$\Psi(x,y) = \int\left(2xy^2+2y\right)dx = x^2y^2+2yx+f(y)$$

נגזור לפי y נשוואה ל-$N(x,y)$ ונקבל

$$\begin{gathered} 2x^2y+2x+f'(y) = \Psi_y(x,y) = 2x^2y+2x \\ \Downarrow \\ f(y) = 0 \end{gathered}$$

מכאן

$$\Psi(x,y)=x^2y^2+2yx$$

והפתרון הוא

$$\begin{gathered}\Psi(x,y)=C\\ \Downarrow\\ x^2y^2+2yx=C\end{gathered}$$

14. $y'=-\frac{ax+by}{bx+cy}$

פתרון. ראשית זהה את הפונקציות M,N שהן

$$\begin{cases} M(x,y)=ax+by\\ N(x,y)=bx+cy\end{cases}$$

כדי שהמשוואה תהיה מדוייקת צריך להתקיים

$$M'_y(x,y)=N'_x(x,y)$$

ואכן

$$M'_y(x,y)=b=N'_x(x,y)$$

כעת נחפש פונקציה $\Psi(x,y)$ כך ש-

$$\begin{cases} \Psi_x(x,y)=M(x,y) &= ax+by\\ \Psi_y(x,y)=N(x,y) &= bx+cy\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ש-

$$\Psi(x,y)=\int(ax+by)\,dx=\frac{a}{2}x^2+byx+f(y)$$

נגזור לפי y נשוואה ל-$N(x,y)$ ונקבל

$$\begin{gathered}bx+f'(y)=\Psi_y(x,y)=bx+cy\\ \Downarrow\\ f(y)=\tfrac{c}{2}y^2\end{gathered}$$

מכאן

$$\Psi(x,y)=\frac{a}{2}x^2+byx+\frac{c}{2}y^2$$

והפתרון הוא

$$\begin{gathered}\Psi(x,y)=C\\ \Downarrow\\ \tfrac{a}{2}x^2+byx+\tfrac{c}{2}y^2=C\end{gathered}$$

שזאת אלפיסה!

15. $(e^x\sin y-2y\sin x)+(e^x\cos y+2\cos x)\,y'=0$

פתרון. ראשית זהה את הפונקציות M,N שהן

$$\begin{cases} M(x,y)=e^x\sin y-2y\sin x\\ N(x,y)=e^x\cos y+2\cos x\end{cases}$$

כדי שהמשוואה תהיה מדוייקת צריך להתקיים

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y)$$

ואכן

$$M'_y(x,y) = e^x \cos y - 2\sin x = N'_x(x,y)$$

כעת נחפש פונקציה $\Psi(x,y)$ כך ש-

$$\begin{cases} \Psi_x(x,y) = M(x,y) & = & e^x \sin y - 2y\sin x \\ \Psi_y(x,y) = N(x,y) & = & e^x \cos y + 2\cos x \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ש-

$$\Psi(x,y) = \int (e^x \sin y - 2y \sin x)\, dx = e^x \sin y + 2y \cos x + f(y)$$

נגזור לפי y נשוואה ל-$N(x,y)$ ונקבל

$$\begin{gathered} e^x \cos y + 2\cos x + f'(y) = \Psi_y(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x \\ \Downarrow \\ f(y) = 0 \end{gathered}$$

מכאן

$$\Psi(x,y) = e^x \sin y + 2y \cos x$$

והפתרון הוא

$$\begin{gathered} \Psi(x,y) = C \\ \Downarrow \\ e^x \sin y + 2y \cos x = C \end{gathered}$$

16. $y'' + 2y' - 3y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = 3, -1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$$

17. $y'' + 3y' + 2y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -1, -2$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

18. $6y'' - y' - y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{1}{3}t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t}$$

.19 $2y'' - 3y' + y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = 1, \frac{1}{2}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t}$$

.20 $y'' + 5y' = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = 0, -5$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-5t}$$

.21 $y'' + 2y' + y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -1, -1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

.22 $y'' + 4y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -2i, 2i$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

תרגיל 2. מצאו פתרון פרטי למד"רים בסעיפים האי-זוגיים.

1. $y' = (1-2x)\,y^2$ עם תנאי התחלה $y(0) = -\frac{1}{6}$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = (1-2x)\,y^2 \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = (1-2x)\,y^2 \\ \Downarrow \\ \frac{1}{y^2}dy = 1-2xdx \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y^2}dy = \int 1-2xdx \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{y} = x - x^2 + C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} -\frac{1}{y} = x - x^2 + C \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{-\frac{1}{6}} = 0 - 0^2 + C \\ \Downarrow \\ 6 = C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$-\frac{1}{y} = x - x^2 + 6$$

2. $y' = \frac{1-2x}{y}$ עם תנאי התחלה $y(1) = -2$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{1-2x}{y} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y} \\ \Downarrow \\ ydy = 1-2xdx \\ \Downarrow \\ \int ydy = \int 1-2xdx \\ \Downarrow \\ \frac{y^2}{2} = x - x^2 + C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = x - x^2 + C \\ \Downarrow \\ \frac{(-2)^2}{2} = 1 - 1^2 + C \\ \Downarrow \\ 2 = C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = x - x^2 + 2 \\ \Downarrow \\ y = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4} \end{gathered}$$

3. $xdx+ye^{-x}dy=0$ עם תנאי התחלה $y(0)=1$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} xdx+ye^{-x}dy=0 \\ \Downarrow \\ ye^{-x}dy=-xdx \\ \Downarrow \\ ydy=-xe^{x}dx \\ \Downarrow \\ \int ydy=\int -xe^{x}dx \\ \Downarrow \\ \frac{y^2}{2}=-xe^{x}+e^{x}+C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2}=-xe^{x}+e^{x}+C \\ \Downarrow \\ \frac{1^2}{2}=-0e^{0}+e^{0}+C \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2}=C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2}=-xe^{x}+e^{x}-\frac{1}{2} \\ \Downarrow \\ y=\sqrt{-2xe^{x}+2e^{x}-1} \end{gathered}$$

4. $y'=\frac{y^2}{x}$ עם תנאי התחלה $y(1)=2$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y'=\frac{y^2}{x} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x} \\ \Downarrow \\ \frac{1}{y^2}dy=\frac{1}{x}dx \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y^2}dy=\int \frac{1}{x}dx \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{y}=\ln(x)+C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} -\frac{1}{y}=\ln(x)+C \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2}=\ln(1)+C \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2}=C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$\begin{gathered} -\frac{1}{y}=\ln(x)+C \\ \Downarrow \\ y=-\frac{1}{\ln(x)-\frac{1}{2}} \end{gathered}$$

5. $y' = \frac{2x}{y+x^2y}$ עם תנאי התחלה $y(0) = -2$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{2x}{y+x^2y} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y(1+x^2)} \\ \Downarrow \\ ydy = \frac{2x}{1+x^2}dx \\ \Downarrow \\ \int ydy = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ \Downarrow \\ -\frac{y^2}{2} = \ln\left(1+x^2\right) + C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = \ln\left(1+x^2\right) + C \\ \Downarrow \\ \frac{(-2)^2}{2} = \ln\left(1+0^2\right) + C \\ \Downarrow \\ 2 = C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = \ln\left(1+x^2\right) + C \\ \Downarrow \\ y = -\sqrt{2\ln\left(1+x^2\right)+4} \end{gathered}$$

6. $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \\ \Downarrow \\ \frac{1}{y^3}dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y^3}dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2(1)^2} = \sqrt{1+0^2} + C \\ \Downarrow \\ -\frac{3}{2} = C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$-\tfrac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$$
$$\Downarrow$$
$$-\tfrac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} - \tfrac{3}{2}$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{-2\sqrt{1+x^2}+3}}$$

7. $y'' + y' - 2y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = y'(0) = 1$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -2, 1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל שתי משוואות בשני נעלמים שהן

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases}$$

הפתרון של המערכת הזאת הוא

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$$

8. $y'' + 4y' + 3y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -3, -1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל שתי משוואות בשני נעלמים שהן

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 - 3C_2 = -1 \end{cases}$$

הפתרון של המערכת הזאת הוא

$$\begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

.9 $y'' + 4y' + 4y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -2, -2$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל שתי משוואות בשני נעלמים שהן

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -2C_1 + C_2 = -1 \end{cases}$$

הפתרון של המערכת הזאת הוא

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא

$$y(t) = e^{-2t} + te^{-2t}$$