

שאלות המבחן (הפתרונות מופיעים מיד אחרי כן):

שאלה 1 (30 נק'): יהי אופרטור $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ עבורו מתקיים

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a-2 \\ 4a \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ -2a \end{pmatrix}$$

- (א) עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ ההעתקה לכסינה?
 (ב) עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ ההעתקה לכסינה אוניטרית? (מעל המ"פ הסטנדרטית)

שאלה 2 (30 נק'): במרחב הפונקציות הממשיות הרציפות ב $[-1, 1]$ הפונקציה הבאה מגדירה מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

הערה - אין קשר בין הסעיפים.

- (א) מצאו בסיס אורתוגונלי לתת-המרחב הוקטורי $W = \text{span} \{1, x, x^2, x^3\}$.
 (ב) ידוע כי $U = \left\{ g : \int_{-1}^1 g(x) dx = 0 \right\}$ הוא תת-מרחב וקטורי.
 מצאו את ההיטל של $f(x) = x^2$ על תת-המרחב.
 רמז: הראו כי $\{g(x) = c : c \in \mathbb{R}\} \subseteq U^\perp$ והיעזרו בכך למציאת ההיטל.

שאלה 3 (24 נק'): תהי H מטריצה הרמיטית ($H^* = H$)

- (א) הראו כי כל הערכים העצמיים שלה ממשיים.
 (ב) נניח מתקיים $H^k = I$ עבור $k \geq 1$ כלשהו. הראו כי $H^2 = I$.

שאלה 4 (24 נק'): תהיינה M_1, M_2 מטריצות חיוביות והרמיטיות עבורן $M_1 + M_2 = I$.

- (א) הראו כי כל הערכים העצמיים של M_1, M_2 הם ב $[0, 1]$.
 (ב) הוכיחו כי לכל w מתקיים $\|M_1 w\| \leq \|w\|$.
 (ג) יהיו u, v מנורמה 1 שעבורם מתקיים $\|u - v\| < \delta$. הראו כי

$$|\langle u, M_1 u \rangle - \langle v, M_1 v \rangle| < 2\delta$$

פתרונות בעמודים הבאים:

1 שאלה 1

נתון:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a-2 \\ 4a \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ -2a \end{pmatrix}$$

ואנחנו צריכים לברר עבור אילו ערכי a האופרטור T לכסין. נשים לב שהקבוצה:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

היא בסיס, למשל ע"י:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 4 & a-2 & a \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 2a & 0 \end{pmatrix}.$$

נחשב את הפולינום האופייני: המטריצה המייצגת של T לפי B היא:

$$\Delta_T(t) = \det(tI_3 - [T]_B) = \det \begin{pmatrix} t-4 & 2-a & -a \\ 0 & t & -2a \\ 0 & -2a & t \end{pmatrix} = (t-4)(t^2-4a^2) = (t-4)(t-2a)(t+2a).$$

כלומר הע"ע הם: $4, \pm 2a$. אם $a \neq 0, \pm 2$ אז כל הע"ע שונים והאופרטור לכסין. אחרת נבדוק:

$$r_g(4) = 3 - \text{RANK}([T]_B - 4I_3) = 3 - \text{RANK} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 1 < r_a(4) \text{ נקבל: } a = 2$$

$$r_g(4) = 3 - \text{RANK}([T]_B - 4I_3) = 3 - \text{RANK} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} = 1 < r_a(4) \text{ נקבל: } a = -2$$

$$r_g(0) = 3 - \text{RANK}([T]_B) = 3 - \text{RANK} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = r_a(0) \text{ נקבל: } a = 0$$

כלומר T לכסין לכל $a \neq \pm 2$.

כעת נבדוק לכסון אוניטרי. עפ"י משפט זה שקול להיות T נורמלי.

$$\text{נחשב תחילה מטריצת מעבר } M = M_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ואז:}$$

$$\begin{aligned} [T]_E [T]_E^t &= M^{-1} [T]_B [T]_B^t M = \begin{pmatrix} 6a^2 & 2a^2 & 0 \\ 4a^2 - 4a + 20 & 20 & 4a^2 - 8a \\ -4a + 10 & 10 - 2a^2 - 2a & 6a^2 - 4a \end{pmatrix} \\ &\neq [T]_E^t [T]_E = M^{-1} [T]_B^t [T]_B M = \begin{pmatrix} 5a^2 - 4 & -a^2 + 6a - 8 & 2a^2 - 4a \\ 4a + 8 & 16 - 4a & 8a \\ -2a^2 + 3a + 6 & -2a^2 - 3a + 12 & 4a^2 + 6a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר T אינו לכסין אוניטרית לשום ערך של a .

שאלה 2:

סעיף א': נבצע תהליך גרם שמידט

$$\{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3\}$$

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = x - \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x - 0 = x$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} x =$$

$$= x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot 1 - 0 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 =$$

$$= x^3 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} x - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx}{\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= x^3 - 0 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}x - 0 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \left\{1, x, x^2 - \frac{2}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x\right\} \text{ סה"כ}$$

מהווים בסיס א"ג ל- W .

סעיף ב':

ידוע כי $v - \pi_U(v) \in U^\perp$, וכי ההפרש בין v להיטל בלבד מקיים תכונה זו.

(הערה: בהרצאה ראינו את זה רק למרחבים נוצרים סופית, אך זה נכון באופן כללי. נתחשב בכך בבדיקת המבחן.)

יחד עם הרמז, ננחש כי

$$v - \pi_U(v) = c$$

כאשר c פונקציה קבועה.

$$\text{(אכן אם } \int_{-1}^1 g(x) dx = 0 \text{ אזי גם } \int_{-1}^1 (c \cdot g(x)) dx = c \cdot 0 = 0 \text{ ולכן } \langle c, g \rangle = 0 \text{ ו} c \in U^\perp \text{.)}$$

ולכן ההיטל יהיה

$$\pi_U(x^2) = x^2 - c$$

נבדוק אם ייתכן כי וקטור זה אכן שייך ל- U

$$\int_{-1}^1 (x^2 - c) dx = \left[\frac{x^3}{3} - cx \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} - 2c \stackrel{\text{רצוי}}{=} 0$$

וזה אכן נכון עבור $c = \frac{1}{3}$.

$$\text{סה"כ ההיטל הוא } \pi_U(x^2) = x^2 - \frac{1}{3} \text{ וכן } x^2 - \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \in U^\perp$$

שאלה 3:

סעיף א':

כיוון ש- H הרמיטית היא לכסינה אוניטרית, כלומר קיימת U אוניטרית ו- D אלכסונית כך ש

$$D = U^* H U$$

לכן

$$D^* = U^* H^* U \stackrel{H^*=H}{=} U^* H U = D$$

$$\text{נסמן } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ וכיוון ש } D^* = D \text{ נובע כי לכל ע"ע } \lambda_i \text{ מתקיים כי } \overline{\lambda_i} = \lambda_i \text{ ולכן } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

סעיף ב':

נניח כי $H^k = I$, לכל לכל ע"ע λ_i של H מתקיים כי $\lambda_i^k = 1$ כלומר $\lambda_i^k = 1$.

כיוון שכל הע"ע ממשיים, נובע כי $\lambda_i = \pm 1$

ביחד עם האמור בסעיף א', נקבל כי

$$A = UDU^*$$

$$A^2 = UD^2U^*$$

וכיוון ש $\lambda_i = \pm 1$ נובע כי $\lambda_i^2 = 1$ ולכן $D^2 = I$ ולכן

$$A^2 = UIU^* = I$$

שאלה 4:

פתרון.

א) נראה עבור M_1 (סימטרי ל M_2). יהי $\lambda \geq 0$ ע"ע של M_1 יחד עם $v \neq 0$ ו"ע. נשים לב כי

$$v = Iv = (M_1 + M_2)v = M_1v + M_2v = \lambda v + M_2v$$

$$M_2v = v - \lambda v = (1 - \lambda)v$$

לכן v ו"ע של M_2 יחד עם $1 - \lambda \geq 0$ כע"ע, לכן $\lambda \leq 1$.

ב) בגלל שהמטריצות הרמיטיות, הן נורמליות ולכן לכסינות אוניטריות. לכן, יש בסיס אורתונורמלי $\{e_i\}_{i=1}^n$ המורכב מו"ע. נכתוב $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. עכשיו,

$$M_1 w = M_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i M e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i$$

לכן,

$$\begin{aligned}\|M_1 w\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_j \lambda_j} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_j \lambda_j} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \lambda_i^2 \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \max_{k=1}^n \lambda_k^2 \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\rangle = \langle w, w \rangle = \|w\|^2\end{aligned}$$

כנדרש.

(ג)

$$|\langle u, M_1 u \rangle - \langle v, M_1 v \rangle| = |\langle u, M_1 u \rangle - \langle u, M_1 v \rangle + \langle u, M_1 v \rangle - \langle v, M_1 v \rangle|$$

מאי-שיוויון המשולש

$$\leq |\langle u, M_1 u \rangle - \langle u, M_1 v \rangle| + |\langle u, M_1 v \rangle - \langle v, M_1 v \rangle|$$

$$= |\langle u, M_1 (u - v) \rangle| + |\langle u - v, M_1 v \rangle|$$

מקושי-שוורץ

$$\leq \|u\| \cdot \|M_1 (u - v)\| + \|u - v\| \cdot \|M_1 v\|$$

עכשיו $\|u\| = 1, \|u - v\| \leq \delta$ ולכן

$$\leq \|M_1 (u - v)\| + \delta \|M_1 v\|$$

בנוסף v מנורמה 1 ומטענת העזר $\|M_1 v\| \leq \|v\| = 1$.
כמו כן, $\|u - v\| \leq \delta$ ולכן $\|M_1 (u - v)\| \leq \delta$, סה"כ

$$\leq \delta + \delta \cdot 1 = 2\delta$$