

אלגברה מופשטת – תרגיל 2

- על התרגיל יש לרשום: שם, תעודת זהות, שם המתרגל.
- יש להגיש את התרגיל **ללא** ניילוניות ו/או קלסרים! אלא בקובץ דפים מהודק מצד ימין!

שאלה 1

- א. מצאו את המחלק המשותף המקסימלי: $(5614, 1260)$.
- ב. מצאו $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ כך ש- $1525\alpha + 927\beta = 1$.

שאלה 2

- (א) תהי G חבורה סופית, $a, b \in G$. הוכיחו: $\text{ord}(ab) = \text{ord}(ba)$.
- (רמז: אם $\text{ord}(ab) = n$, $\text{ord}(ba) = m$, הסתכלו על $(ba)^{n+1}$ ועל $(ab)^{m+1}$).
- (ב) תהי G חבורה, $\text{ord}(g) = n$, $g \in G$. הוכיחו ש- $g^a = g^b$ אם ורק אם $a \equiv b \pmod{n}$.

שאלה 3

- א. נגדיר $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$. הוכיחו כי G חבורה ביחס לפעולת כפל

- מטריצות, מצאו את הסדר של G ואת הסדר של כל איבר ב- G .
- ב. תהי G חבורה. אם לכל $a, b \in G$ מתקיים $(ab)^3 = a^3b^3$ האם G אבליית?

שאלה 4

- אילו מן החבורות הבאות הן ציקליות? עבור החבורות הציקליות מצאו יוצר, אחרת הסבירו מדוע החבורה אינה ציקלית.

א. $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$

ב. $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$

ג. U_{20}

שאלה 5

- אילו מתת-החבורות הציקליות הבאות הן סופיות (במקרה זה מצאו את מספר האיברים) ואילו מהן אינסופיות:

אלגברה מופשטת 1
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג
מרצה: פרופסור עוזי וישנה

א. $\langle a = 1 + i \rangle$ ב- (\mathbb{C}^*, \cdot)

ב. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ב- $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$

שאלה 6

תנו דוגמא למונואיד ציקלי סופי (כלומר, קיים $a \in M$ כך ש- $M = \{1, a, a^2, \dots\}$) שאינו חבורה.

שאלה 7

א. מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 8 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 8 של U_{32} .

ב. מצאו בתוך $(\mathbb{Q}, +)$ שרשרת אינסופית (עולה) של תת חבורות ציקליות.

רמז: הראשונה נוצרת על ידי 1.

בהצלחה!