

שאלון בחינה בקורס פולינומים אלגוריתמים (88-856-01)

שם המרצה: פרופ' ג'ורג' זינגר
סמסטר ב', מאצה א'

משך הבחינה שעה וחצי.
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון, בעזרת אף נוסחון.
משקל כל שאלה 20 נקודות.

פרק א' - בחור 3 או 2 שאלות מתוך 5.

1. יהא V אפסר $\mathbb{R}$ המכיל את המרחב $[1, \infty)$ כמרחב $[1, \infty)$ (פונקציות).

רציפות) יהיה מרחב הוורט. נתון.

2. מצא את המרחב בין נקודות x, y במרחב V .

(א) $x(t) = t^3, y(t) = t^2 + t - 1, V = C[-2, 2]$

(ב) $x(t) = t^3, y(t) = t^2 + t - 1, V = L^1[-2, 2]$

(ג) $x = \{\frac{1}{n}\}_1^\infty, y = \{\frac{1}{n+1}\}_1^\infty, V = \ell^2$

3. מצא את הוורט של הפונקציה $f(x) = x^2$ על $[1, \infty)$ עם תנאי $\{1, x, x^3\}$ CL_2 (הוורט).

(5. א. מצא את $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ כך ש $\|f - g\| = \min \|f - (x^2 + x - 1)\|$ על $[1, \infty)$.

4. האם כי פונקציות $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ מהווה מערכת אורתונורמלית?

(ב) מערכת פונקציות אורתונורמליות על $(-\infty, \infty)$ ביחס למשקל $p(x) = e^{-x^2}$.

(ג) חשב את אינטגרל ארבעה פונקציות יחידניות.

5. האם כי פונקציות $P_n(x)$ כגון $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ מהוות בסיס אורתונורמלי?

$(1-x^2)y'' + (x-2xy') + n(n+1)y = 0$

הם אורתונורמליות בקטע $[1, 1]$ ביחס למשקל $p(x) = 1$.

פרק ב' - בחור 2 או 3 שאלות מתוך 5.

1. האם אי-שוויון קושי-בונדארטסקי-שורצר?

2. משהיט השלימות של מערכת פולינומים אלגוריתמים במרחב $CL^2[a, b]$.

3. גורמים אפסית של פונקציות אורתונורמליות ביחס למשקל $p(x)$ על קטע $[a, b]$.

4. גורמי סימטרי של פונקציות אורתונורמליות $(P_n(x) = (-1)^n P_n(x))$.

5. משהיט הוורט של נקודות x, y במרחב $CL^2[a, b]$ במרחב $CL^2[a, b]$.

בהצלחה!

שאלון בחינה בקורס פאונדמנטל אורגניזם (88-856-01)

שם המרצה פרופ' זינגי זינגי
סטודנט א', מאחז ב'

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן המעביר חומר עזר לרעהו
או רמז מילולי ייענש בחומרה

משך הבחינה שצגים וחצי.

חומר עזר מותר השימוש: מחשבון קלף נוסחאות.

משקל כל שאלה שני נקודות.

פרק א' - בחור 3 או 2 שאלות מתוך 5.
1. האם אפשר להגדיר את המכפלה פנימית במרחב ℓ^p עבור $p \geq 1$ כן שחיובי ℓ

יהיה מרחב הילברט. נמק.

2. מצא את המרחק בין נקודות x, y במרחב מטרי V .

$$x(t) = 16t^3 + 48t, y(t) = 60t^2 + 11$$

$$V = C[0, 1]$$

$$x(t) = 16t^3 + 48t, y(t) = 60t^2 + 11$$

$$V = L^1[0, 1]$$

$$x = \left(\frac{n^2}{2^n}\right)_1^\infty, y = \left(\frac{n}{2^n}\right)_1^\infty$$

(ג)

3. מצא את היטל g של פונקציה $f(x) = x$ על $C[0, \frac{\pi}{2}]$ ונמצא את g על $C[0, \frac{\pi}{2}]$.
 $\text{Span}\{\sin x, \cos x\}$ בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$. c.s. מצא את $g = \alpha \sin x + \beta \cos x$ כך $\|f - g\|_2 = e$.

$$\|f - g\|_2 = \min_{\alpha, \beta} \|x - (\alpha \sin x + \beta \cos x)\|_2$$

4. מצא את בטסורה נסיגה עפ"י נוסחה $P_n(x)$ וזו פונקציה יזורה שלמה

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

5. האם כי פונקציות של יאקובי (Jacobi) (α, β) $J_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ $(-1, 1)$ בקטע $(-1, 1)$;
 $J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1}]$

(ב) מרכיב אורגניזם ע"י $(-1, 1)$ ביחס למשקל $P(x) = (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta}$.

פרק ב' - בחור 2 או 3 שאלות מתוך 5

1. האם אי-שוויון של הולדר (Hölder).

2. גבולות שקילות של מרכיב אורגניזם (שלישון, סגור, קצוץ, לפי פול אבול).

3. משוואה נסיגה עפ"י נוסחה אורגניזם.

4. משפט פיינמן-הילברט על $S_n(f; x)$ במרחב $CL^2(a, b)$.

5. משפט הקוראם/טור בקורב במרחב של הילברט.

בהצלחה!

$$(\mathcal{Q}_n(x), \mathcal{Q}_m(x)) = \int_a^b \rho(x) \mathcal{Q}_n(x) \mathcal{Q}_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \|\mathcal{Q}_n\|^2, & n = m \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}_n(x) = \gamma_n x^n + \dots$$

$$\hat{\mathcal{Q}}_n(x) = \frac{\mathcal{Q}_n(x)}{\|\mathcal{Q}_n\|} = \mu_n x^n + \dots$$

Δ δκλ ελνζ ηθ πωλ ς δ κ λ μ ν ξ η θ ζ

$$P'_n(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P'_n(x)$$

$$L'_{n-1}(x) - L'_n(x) = L_{n-1}(x)$$

$$H'_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \quad H'_n = 2n H_{n-1}(x)$$

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \mathcal{Q}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) \mathcal{Q}_n(x) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \mathcal{Q}_{n-1}(x)$$

$$W(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}_n(x) t^n$$

	Rodrigue	$\ \mathcal{Q}_n\ ^2$	γ_n	μ_n	$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \eta \theta \zeta$	$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \eta \theta \zeta$	$\mathcal{Q}'_{n-1}(x)$	$\mathcal{Q}'_n(x)$	$\mathcal{Q}_n(0)$
Legendre $P_n(x)$ $P(x) = 1$	$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$	$\frac{2}{2n+1}$	$\frac{(2n)!}{2^n n!}$	$\frac{(2n)!}{2^n n!}$	$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_n'(x)$ $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$	$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$	$(-1)^n$	$P_{2n}(0) = 0$ $P_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$ $P_{2n}(0) = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}$
Chebyshev I $T_n(x)$ $P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$	$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$	2^{n-1}	$\mu = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\frac{1}{\sqrt{x}} 2^{n-1}$	$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$	$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$	$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$	$(-1)^n$	$T_{2n}(0) = 0$ $T_{2n+1}(0) = (-1)^n$
Chebyshev II $U_n(x)$ $P(x) = \sqrt{1-x^2}$	$U_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$	$\frac{\pi}{2}$	2^n	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ $U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$	$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(x)$	$(-1)^n (n+1)$	$U_{2n}(0) = 0$ $U_{2n+1}(0) = (-1)^n$
Laguerre $L_n(x)$ $P(x) = e^{-x}$	$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{n! \Gamma(n+1)}$	1	$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) + nL_{n-1}(x)$ $L_0(x) = 1, L_1(x) = 1-x$	$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0$	$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$		1
Hermit $H_n(x)$ $P(x) = e^{-x^2}$	$H_n(x) = \frac{1}{n!} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2} x^n)$	$2^n \sqrt{\pi}$	2^n	$\frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{\pi}}$	$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x$	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$	$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$		$H_{2n}(0) = 0$ $H_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{n!}{n!}$ $H_{2n}(0) = \frac{2^n n!}{(2n)!}$
Jacobi $J_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ $P(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ $\alpha > -1, \beta > -1$	$J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)}$			$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)L_n(x) = (2+\beta+2n+1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)L_n(x) + (2+\alpha-\beta+2n+1)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)L_{n-1}(x)$ $J_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(0) = 0$	$(1-x^2)y'' + [(\beta-\alpha)-(1+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$	$2^{2n} t^n$		$A = \sqrt{1+2\beta+2}$