

תרגיל בית 4 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). מצאו את כל האיברים מסדר סופי בחבורות הבאות: \mathbb{R}^* , \mathbb{Q}^* , \mathbb{Z} .

שאלה 2 (חימום). תארו את כל המחלקות השמאליות ב- $\mathbb{Z}_{30}/\langle 3 \rangle$.

שאלה 3. תהינה G_1, G_2 חבורות, ותהי $K \leq G_1 \times G_2$ תת-חבורה. הוכיחו או הפריכו: קיימות תת-חבורות $H_1 \leq G_1$ ו- $H_2 \leq G_2$ כך ש- $K = H_1 \times H_2$.

שאלה 4. מצאו את כל המספרים n כך ש- $\varphi(n) = 4$ וכל המספרים m כך ש- $\varphi(m) = 8$. זה בסדר להשתמש במחשב עבור פעולות חשבון פשוטות.

שאלה 5. נתבונן בחבורת שורשי היחידה Ω_∞ .

א. מצאו תת-חבורה אינסופית נאותה של Ω_∞ . (תזכורת: תת-חבורה $H \leq G$ נקראת נאותה אם $H \neq G$)

ב. הוכיחו שכל תת-חבורה נאותה של Ω_∞ היא מאינדקס אינסופי. הדרכה אפשרית: אם $H \leq G$ תת-חבורה נאותה, ניקח $\omega_n \notin H$ שורש יחידה מתאים. הראו ששורשי היחידה $\omega_n, \omega_{2n}, \omega_{3n}, \dots$ שייכים למחלקות שונות של H .

שאלה 6. מצאו את האינדקסים הבאים:

א. $[U_{14} : \langle 11 \rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

ב. $[\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 : \langle (2, 2) \rangle]$ רמז: משפט לגראנז'.

ג. $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (2, 2) \rangle]$ רמז: קודם תארו את המחלקות השמאליות.

שאלה 7. תהי G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ תת-חבורות סופיות שלה.

א. הוכיחו שאם $(|H|, |K|) = 1$, אז $H \cap K = \{e\}$.

ב. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$ וגם $H \neq K$, אז $H \cap K = \{e\}$.

שאלות רשות

שאלה 8. תהי I קבוצה מכוונת (כלומר I היא קבוצה סדורה חלקית כך שלכל $i, j \in I$ קיים $k \in I$ כך ש- $k > i, j$). מערכת של חבורות $\{G_i\}_{i \in I}$ נקראת רשת עולה אם לכל $i < j$ מתקיים $G_i \subseteq G_j$.

הוכיחו שבמקרה זה $\bigcup_{i \in I} G_i$ היא חבורה. בפרט, אם ישנה שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$, אז גם איחוד השרשרת הוא חבורה.