מתמטיקה לכימאים - פתרון תרגיל 10

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל 1. מצאו את התמרת לפלס של הפתרון עבור

1. $y''+2y'+y=f\left(t\right)$ עבור $f\left(t\right)=\begin{cases}1 & \pi\leq t<\frac{\pi}{2}\\ 0 & else\end{cases}$ ו- $\begin{cases}y\left(0\right)=0\\ y'\left(0\right)=1\end{cases}$

פתרון. נפעיל התמרת לפלס על המשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}y''+y=f\left(t\right)\\ \Downarrow\\ \left[s^{2}\mathfrak{L}\left(s\right)-sy\left(0\right)-y'\left(0\right)\right]+2\left[s\mathfrak{L}\left(s\right)-y\left(0\right)\right]+\mathfrak{L}\left(s\right)=\mathfrak{L}_{f}\left(s\right)\\ \Downarrow\\ \left(s^{2}+2s+1\right)\mathfrak{L}\left(s\right)+1=\mathfrak{L}_{f}\left(s\right)\\ \Downarrow\\ \mathfrak{L}\left(s\right)=\frac{\mathfrak{L}_{f}\left(s\right)-1}{\left(s+1\right)^{2}}\end{gathered}$$

כעת נחשב את התמרת לפלס של f

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{f}\left(s\right) & = & \int_{0}^{\infty}e^{-st}f\left(t\right)dt & =\\ & = & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-st}dt & =\\ & = & \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} & =-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}+-\frac{e^{-\pi s}}{s}\end{aligned}$$

מכאן התמרת לפלס של הפתרון הוא

$$\mathfrak{L}\left(s\right)=\frac{-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}+\frac{1}{s}-1}{s^{2}+1}=-\frac{1}{\left(s+1\right)^{2}}+\frac{e^{-\pi s}}{s\left(s+1\right)^{2}}-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s\left(s+1\right)^{2}}$$

2. $y''+3y'+2y=f\left(t\right)$ עבור $f\left(t\right)=\begin{cases}1 & 0\leq t<10\\ 0 & 10\leq t<\infty\end{cases}$ ו- $\begin{cases}y\left(0\right)=0\\ y'\left(0\right)=1\end{cases}$

פתרון. נפעיל התמרת לפלס על המשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}y''+3y'+2y=f\left(t\right)\\ \Downarrow\\ \left[s^{2}\mathfrak{L}\left(s\right)-sy\left(0\right)-y'\left(0\right)\right]+3\left[s\mathfrak{L}\left(s\right)-y\left(0\right)\right]+2\mathfrak{L}\left(s\right)=\mathfrak{L}_{f}\left(s\right)\\ \Downarrow\\ \left(s^{2}+3s+2\right)\mathfrak{L}\left(s\right)=\mathfrak{L}_{f}\left(s\right)\\ \Downarrow\\ \mathfrak{L}\left(s\right)=\frac{\mathfrak{L}_{f}\left(s\right)}{\left(s+2\right)\left(s+1\right)}\end{gathered}$$

כעת נחשב את התמרת לפלס של f

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &=& \\ &= \int_0^{10} e^{-st}dt &=& \\ &= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{10} &=& -\frac{e^{-10s}}{s}+\frac{1}{s}\end{aligned}$$

מכאן התמרת לפלס של הפתרון הוא

$$\mathfrak{L}(s) = \frac{-\frac{e^{-10s}}{s}+\frac{1}{s}}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s(s+2)(s+1)} - \frac{e^{-10s}}{s(s+2)(s+1)}$$

תרגיל 2. פתרו את המד"רים הבאים

1. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -3 & \lambda+4 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-1)(\lambda+4)+6 = (\lambda+2)(\lambda+1)$$

הע"ע הם $\lambda = -2, -1$ נמצא ו"ע

- $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$$

2. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -3 & \lambda + 2 \end{pmatrix}\right| = (\lambda - 2)(\lambda + 2) + 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

הע"ע הם $\lambda = 1, -1$ נמצא ו"ע

- $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

.3 $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{pmatrix}\right| = (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

הע"ע הם $\lambda = 2, -3$ נמצא ו"ע

- $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

.4 $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \right| = (\lambda+2)(\lambda+2) - 1 = (\lambda+3)(\lambda+1)$$

הע"ע הם $\lambda = -1, -3$ נמצא ו"ע

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

.5 $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}\right| = (\lambda - 2)(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 + 1$$

הע"ע הם $\lambda = \pm i$ נמצא ו"ע

- $\lambda = i$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 2v_1 - 5v_2 = iv_1 \\ v_1 - 2v_2 = iv_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_1 = (2 + i)\, v_2$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \end{pmatrix}(\cos(2t) + i\sin(2t)) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) + 2i\sin(2t) + i\cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) + i\sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = C_1\begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2\sin(2t) + \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

6. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -5 & \lambda + 3 \end{pmatrix}\right| = (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

הע"ע הם $\lambda = -1 \pm i$ נמצא ו"ע

- $\lambda = -1 + i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (-1 + i)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} v_1 - v_2 = (-1 + i)\, v_1 \\ 5v_1 - 3v_2 = -1 + iv_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_2 = (2 - i)\, v_1$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - i \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t}\left(\cos(t)+i\sin(t)\right)=\begin{pmatrix} \cos(t)+i\sin(t) \\ 2\cos(t)+2i\sin(t)-i\cos(t)+\sin(t) \end{pmatrix} e^{-t}=\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(t)+\sin(t) \end{pmatrix} e$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'=C_1\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(t)+\sin(t) \end{pmatrix} e^{-t}+C_2\begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2\sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix} e^{-t}$$

.7
$$\begin{cases} x_1'=x_1+2x_2 \\ x_2'=-5x_1-x_2 \end{cases}$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 5 & \lambda+1 \end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)(\lambda+1)+10=\lambda^2+9$$

הע"ע הם $\lambda=\pm 3i$ נמצא ו"ע

- $\lambda=3i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=3i\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} v_1+2v_2=3iv_1 \\ -5v_1-v_2=3iv_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_2=\left(\tfrac{-1+3i}{2}\right)v_1$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1+3i \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1+3i \end{pmatrix}\left(\cos(3t)+i\sin(3t)\right)=\begin{pmatrix} 2\cos(3t)+2i\sin(3t) \\ -\cos(t)-i\sin(t)+3i\cos(t)-3\sin(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cos(3t) \\ -\cos(t)-3\sin(t) \end{pmatrix}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'=C_1\begin{pmatrix} 2\cos(3t) \\ -\cos(t)-3\sin(t) \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 2\sin(3t) \\ -\sin(t)+3\cos(t) \end{pmatrix}$$

.8
$$\begin{cases} x_1'=-\frac{3}{2}x_1+x_2 \\ x_2'=-\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \lambda + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

הערע הם $\lambda = -1$ נמצא ו"ע

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} -\frac{3}{2}v_1 + v_2 = -v_1 \\ -\frac{1}{4}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = -v_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$-v_1 + 2v_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן פתרון אחד הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

את הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases} 2e^{-t} - 2te^{-t} - v_1e^{-t} = -\frac{3}{2}\left(2te^{-t} + v_1e^{-t}\right) + \left(te^{-t} + v_2e^{-t}\right) \\ e^{-t} - te^{-t} - v_2e^{-t} = -\frac{1}{4}\left(2te^{-t} + v_1e^{-t}\right) - \frac{1}{2}\left(te^{-t} + v_2e^{-t}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 2t - v_1 = -\frac{3}{2}(2t + v_1) + (t + v_1) \\ 1 - t - v_2 = -\frac{1}{4}(2t + v_1) - \frac{1}{2}(t + v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = -v_1 + 2v_2 \\ 4 = -v_1 + 2v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -4 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} \right]$$

9. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 7x_2 \end{cases}$ עם תנאי התחלה $\begin{cases} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ -4 & \lambda + 7 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda + 7) + 16 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

העע הם $\lambda = -3$ נמצא ו"ע

- $\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} v_1 - 4v_2 = -3v_1 \\ 4v_1 - 7v_2 = -3v_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_1 - v_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן פתרון אחד הוא

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

את הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases} e^{-3t} - 3te^{-3t} - 3v_1 e^{-3t} = \left(te^{-3t} + v_1 e^{-3t}\right) - 4\left(te^{-3t} + v_2 e^{-3t}\right) \\ e^{-3t} - 3te^{-3t} - 3v_2 e^{-3t} = 4\left(te^{-3t} + v_1 e^{-3t}\right) - 7\left(te^{-3t} + v_2 e^{-3t}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 3t - 3v_1 = (t + v_1) - 4(t + v_2) \\ 1 - 3t - 3v_2 = 4(t + v_1) - 7(t + v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 4v_1 - 4v_2 \\ 1 = 4v_1 - 4v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{4} \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$$

כעת נציב את תנאי התחלה ונקבל

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = 4 \end{array}$$

לכן הפתרון הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + 4 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right] = \begin{pmatrix} 3+4t \\ 2+4t \end{pmatrix} e^{-3t}$$

.10 $\left\{ \begin{array}{l} x_1' = -\frac{5}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ x_2' = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{array} \right.$ עם תנאי התחלה $\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = -1 \end{array} \right.$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע"ע ו"ע למטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda + \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \left(\lambda + \frac{5}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{4} = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

העע הם $\lambda = -1$נמצא ו"ע

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{l} -5v_1 + 3v_2 = -2v_1 \\ -3v_1 + v_2 = -2v_2 \end{array} \right.$$
$$\Downarrow$$
$$-3v_1 + 3v_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכופתרון אחד הוא אתc הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-t} - te^{-t} - v_1e^{-t} = -\frac{5}{2}\left(te^{-t} + v_1e^{-t}\right) + \frac{3}{2}\left(te^{-t} + v_2e^{-t}\right) \\ e^{-t} - te^{-t} - v_2e^{-t} = -\frac{3}{2}\left(te^{-t} + v_1e^{-t}\right) + \frac{1}{2}\left(te^{-t} + v_2e^{-t}\right) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 2-2t-2v_1=-5\left(t+v_1\right)+3\left(t+v_2\right) \\ 2-2t-2v_2=-3\left(t+v_1\right)+\left(t+v_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2=-3v_1+3v_2 \\ 2=-3v_1+3v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1=-\frac{2}{3} \\ v_2=0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) te^{-t}+\left(\begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{array}\right) e^{-t}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\left(\begin{array}{c} x_1\left(t\right) \\ x_2\left(t\right) \end{array}\right)=C_1\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) e^{-t}+C_2\left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) te^{-t}+\left(\begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{array}\right) e^{-t}\right]$$

כעת נציב את תנאי התחלה ונקבל

$$\left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array}\right)=C_1\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)+C_2\left(\begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} C_1=-1 \\ C_2=-6 \end{array}$$

לכן הפתרון הוא

$$\left(\begin{array}{c} x_1\left(t\right) \\ x_2\left(t\right) \end{array}\right)=-1\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) e^{-t}-6\left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) te^{-t}+\left(\begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{array}\right) e^{-t}\right]=\left(\begin{array}{c} 3-6t \\ -1-6t \end{array}\right) e^{-t}$$