מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 7 - פתרון

1. יהיו τ_1, τ_2 טופולוגיות על X . ו- B_1- בסיס ל-(X,τ_1) .
<u>הוכיחו</u> ש- $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אם ורק אם $B_1 \subseteq \tau_2$.

<u>הוכיחה.</u>
<u>כיוון 1:</u> נניח ש-$\tau_1 \subseteq \tau_2$. אזי $B_1 \subseteq \tau_1$ לפי הגדרת הבסיס.
לכן מקבלים $B_1 \subseteq \tau_1 \subseteq \tau_2 \Leftarrow B_1 \subseteq \tau_2$, מש"ל.
<u>כיוון 2:</u> נניח ש-$B_1 \subseteq \tau_2$. אזי $\widehat{B_1} \subseteq \tau_2$ כי טופולוגיה סגורה תחת פעולת האחוד. אבל $\widehat{B_1} = \tau_1$ לפי הגדרת הבסיס. אז לבסוף מקבלים: $\tau_1 \subseteq \tau_2$, מש"ל.

2. יהי B_1 בסיס של טופולוגיה במ"ט (X,T). יהי B_2 אוסף קבוצות פתוחות ב-(X,T) כך שלכל $V \in B_1$ ולכל $x \in V$ קיימת קבוצה $U \in B_2$ המקיימת $x \in U \subseteq V$.
<u>הוכיחו</u> ש- B_2 בסיס של T.

<u>הוכיחה</u>
לפי התנאי $B_2 \subseteq T$ אז מתקים סעיף (I') של הגדרת הבסיס.
תהי W קבוצה פתוחה ב-(X,T) ו- $x \in W$. B_1 בסיס של (X,T). לכן לפי הגדרת הבסיס קיימת קבוצה $V \subseteq W$ כך ש-$x \in V \in B_1$. לפי התנאי קיימת קבוצה $U \in B_2$ המקיימת $x \in U \subseteq V$. אזי $x \in U \subseteq V \subseteq W \Leftarrow x \in U \subseteq W$.
זה מוכיח שמתקיים גם סעיף (II') של הגדרת הבסיס.
לכן B_2 בסיס של T, מש"ל.

3. <u>הוכיחו</u> שרכיבי קשירות של מרחב סורגנפריי הם נקודונים.

4. תהי $A, X \subseteq \mathbb{R}^2$ מוגדרות באופן הבא:

$A = \{x, \sin\frac{1}{x} | x \in (0, \infty)\}$, $X = A \cup \{(0,0)\}$.

<u>הוכיחו</u> ש-A תת מרחב קשיר מסילתית ו-X תת מרחב קשיר.

<u>הוכיחה</u>

הטופולוגיה גם ב-A וגם ב-X היא טופולוגיה המושרה מ-$\mathbb{R}^2$.
הטופולוגיה ב-$(0, \infty)$ היא טופולוגיה המושרה מ-$\mathbb{R}$.
נגדיר $\varphi: (0, \infty) \to A$ כך ש-$\varphi(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$. אנחנו טוענים ש-$\varphi$ העתקה רציפה ונוכיח את זה עוד מאט (ראה/י "טענה" למטא). קל לראות שהיא גם פונקצית על.
לכן (ההרצאות) $\varphi(0, \infty) = A$ קבוצה קשירה מסילתית כי $(0, \infty)$ קבוצה קשירה מסילתית – הדבר הראשון שהיה צ"ל.

<u>סימונים:</u> $\bar{A}^{\mathbb{R}^2}$ - סגור A בתוך $\mathbb{R}^2$, $\bar{A}^{X}$ - סגור A בתוך X.

<u>נוכיח עכשיו</u> ש- $(0,0) \in \bar{A}^{\mathbb{R}^2}$. תהי U סביבה של $(0,0)$ ב-$\mathbb{R}^2$.
אזי U מכילה כדור פתוח $B\big((0,0), \varepsilon\big) \subseteq U$ כאשר $\varepsilon > 0$.
נתבונן בסדרה $x_n \in \mathbb{R}$ כאשר $x_n = \frac{1}{\pi n}$. קל לראות ש-:

I. $x_n \to 0$ ו-

II. $\varphi(x_n) = \left(x_n, \sin\frac{1}{x_n}\right) = (x_n, 0) \in A$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

העובדה (I.) גוררת שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$.
לכן $n \geq n_0 \Rightarrow (x_n, 0) \in B\big((0,0), \varepsilon\big)$. כלומר , בגלל (II.) , הכדור $B\big((0,0), \varepsilon\big)$ חותך את הקבוצה A ולכן U חותכת אותה.

זה מוכיח ש- $(0,0) \in \bar{A}^{\mathbb{R}^2}$, <u>משרצינו להוכיח</u>.

כיוון ש-X $(0,0)\in$ אז מתקיים $(0,0)\in \bar{A}^X$. לפי הגדרת X זה מייד אומרת ש-X = $\bar{A}^X$, או במילים אחרות:
המרחב A צפוף ב-X .
כיוון ש- A מ"ט קשיר מסילתית הוא קשיר.
לכן קשיר גם המרחב X, מש"ל.

נשאר להוכיח רק את ה-
<u>תענה.</u>
הפונקציה $\varphi\colon(0,\infty)\to A$ כך ש-$\varphi(x)=(x,\sin\frac{1}{x})$, רציפה.
<u>הוכחת התענה.</u>
אפשר להיסתכל על φ כמו על תצהאת צמצום הטווח של פונקציה $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ המוגדרת כ-$f=(f_1,f_2)$
כאשר $f_1(x)=x$ ו- $f_2(x)=\sin\frac{1}{x}$ לכל $x\in(0,\infty)$.
כיוון ש-f_1,f_2 רציפות אז גם f רציפה. לכן φ רציפה כתוצאת צמצום הטווח שלה, מש"ל

5. תהי $A\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה של כל הנקודות $a(x,y)$ שלפחות אחת מהקואורדינטות x,y רציונלית.
<u>הוכיחו</u> ש-A תת מרחב קשיר מסילתית.

<u>הוכיחה</u>
1) קודם כל נוכיח שלכל נקודה $a(x,y)\in A$ קיימת מסילה $\gamma_a\colon[0,1]\to A$ כך ש- $\gamma_a(0)=a$ ו- $\gamma_a(1)=o(0,0)$:
יהי - בלי הגבלת הכלליות - $x\in\mathbb{Q}$. אזי נגדיר שתי מסילות δ'_a ו-δ''_a
כך ש- $\delta'_a(t)=(x,(1-t)y)$ ו- $\delta''_a(t)=((1-t)x,0)$.

רואים ש- $\delta_a'(1) = \delta_a''(0) = (x, 0)$ ואפשר לשרשר את המסילות: $\gamma_a = \delta_a' * \delta_a''$.

אזי $\gamma_a(0) = \delta_a'(0) = a(x, y)$

ו- $\gamma_a(1) = \delta_a''(1) = o(0,0)$.

רואים גם ש-$\delta_a''([0,1]) \subseteq A, \delta_a'([0,1]) \subseteq A$.

לכן $\gamma_a([0,1]) \subseteq A$.

2)אם $a, b \in A$ אז המסילה $\gamma_a * \overline{\gamma_b}$ מחברת את הנקודות a, b כך ש-$\gamma_a * \overline{\gamma_b}([0,1]) \subseteq A$, כלומר, לכל שתי נקודות ב-A יש מסילה (בתוך A) שמחברת אותן, מש"ל.