אינפי 1 – תרגול 5

משפט

תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים חיוביים. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ (גם במובן הרחב)

אזי הסדרה $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ גם מתכנסת במובן הרחב ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

תרגיל

חשבו $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

פתרון

נתבונן בסדרה $a_n=n$. זוהי סדרת מספרים חיוביים. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$ ולכן

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

מש"ל

תרגיל

חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sqrt[n]{n!}$.

פתרון

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

מש"ל

סדרות מונוטוניות

הגדרה

סדרה $\{a_n\}$ נקראת עולה אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1}\geq a_n$, והיא נקראת יורדת אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1}\leq a_n$.

משפט

א. סדרה מונוטונית עולה (יורדת) וחסומה מלעיל (מלרע) מתכנסת וגבולה הוא החסם העליון (התחתון).

ב. סדרה מונוטונית עולה (יורדת) שאינה חסומה מלעיל (מלרע) מתכנסת במובן הרחב לאינסוף (מינוס אינסוף).

מסקנה

א. לכל סדרה מונוטונית עולה מתקיים $\lim a_n = \sup a_n$.
ב. לכל סדרה מונוטונית יורדת מתקיים $\lim a_n = \inf a_n$.

תרגיל

הוכיחו שהסדרה הבאה מתכנסת: $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n}$.

פתרון

נרצה להראות שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע. נתחיל עם המונוטוניות. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{3}{3n+1} - \frac{3}{3n} \leq 0$. כלומר, הראינו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq a_{n+1}$ (ולכן הסדרה מונוטונית יורדת). כמו כן, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq 0$ ולכן הסדרה חסומה מלרע על ידי אפס; ומכאן היא מתכנסת.

מש"ל

- הערה: כל סדרה מונוטונית יורדת של מספרים חיוביים תהיה חסומה מלרע על ידי אפס.

תרגיל

יהיו $\alpha, \beta > 0$ ונגדיר $a_1 = \alpha, b_1 = \beta$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. הוכיחו ש- $\{a_n\}, \{b_n\}$ הן סדרות מתכנסות ולאחר מכן הראו שמתקיים $\lim a_n = \lim b_n$.

פתרון

תחילה נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:
$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} \geq 0$. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq b_{n+1}$; או, לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n \geq b_n$.

כעת נבחן את המונוטוניות של הסדרות. לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$. כלומר, החל מ-$n = 2$: $a_n \searrow$. כמו כן, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n$. כלומר, החל מ-$n = 2$: $b_n \nearrow$. מכאן מתקיים:
$b_2 \leq b_n \leq a_n \leq a_2$.

לסיכום, לכל $n\ge 2$ הסדרות הן מונוטוניות וחסומות ולכן מתכנסות.

נוכיח ש- $\lim a_n=\lim b_n$. נסמן $\lim a_n=a, \lim b_n=b$. מתקיים:

$a=\lim a_{n+1}=\lim\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{\lim a_n}{2}+\frac{\lim b_n}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$. נעביר אגפים ונראה ש- $a=b$.

מש"ל

<u>תרגיל</u> (על מנת שיראו דרך נוספת להוכיח מונוטוניות)

מצאו את גבול הסדרה $a_n=\frac{3^n}{2^{n^2}}$.

<u>פתרון</u>

נראה תחילה שהסדרה מונוטונית יורדת: $a_{n+1}\le a_n \;\rightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2^{2n+1}}\le 1$. כמו כן, $\{a_n\}$ חסומה מלרע על ידי אפס ולכן היא מתכנסת. נמצא את גבולה. מהשורה הקודמת ניתן להציג את הסדרה באמצעות כלל הנסיגה $a_1=\frac{3}{2}$, $a_{n+1}=\frac{3}{2^{2n+1}}a_n$.

לכן: $\lim a_{n+1}=\lim\frac{3}{2^{2n+1}}a_n=\lim\frac{3}{2^{2n+1}}\lim a_n$ ומכאן $\lim a_{n+1}=0$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

נתון: $a_1=5,\; a_{n+1}=a_n\cdot\frac{6+a_n}{3+2a_n}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

<u>פתרון</u>

תחילה נוכיח שהסדרה חסומה מלרע ע"י 3 (ולאחר מכן ניעזר בעובדה זו על מנת להוכיח מונוטוניות). באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: $a_1=5\ge 3$

נניח נכונות ל- n: $a_n\ge 3$ ונראה נכונות עבור $n+1$, כלומר: $a_{n+1}\ge 3$.

צריך להוכיח: $3\le a_n\frac{a_n+6}{3+2a_n}$ וזה שקול ל- $9+6a_n\le 6a_n+{a_n}^2$ וזה שקול ל- $9\le {a_n}^2$

וזה נובע מהנחת האינדוקציה.

כעת נעבור להוכחת מונוטוניות יורדת:

יש להראות $a_{n+1}\le a_n$. מתקיים $a_{n+1}=a_n\frac{a_n+6}{3+2a_n}\le a_n\cdot 1$ שכן מתקיים: $1\ge\frac{6+a_n}{3+2a_n}$.

[כדי לבדוק נכונות של אי השווין האחרון – תעשו מכנה משותף והיעזרו בכל ש- $a_n\ge 3$].

הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן מתכנסת.

נמצא את הגבול שלה:

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$ ומאריתמטיקה של גבולות (והשוויון הנתון $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{6+a_n}{3+2a_n}$)

נקבל ש- $L = L \cdot \frac{6+L}{3+2\cdot L}$. מכיוון ש- $L \neq 0$ (מדוע? חשבו על החסם התחתון) ניתן לצמצם ולקבל $L = 3$.

מש"ל

<u>תתי סדרות</u>

<u>הגדרות</u>

1. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים ותהי $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה (ממש) של מספרים טבעיים ($n_1 < n_2 < n_3 < ...$). הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תקרא "תת סדרה" של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. אם תת הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L, נאמר ש- L הוא "גבול חלקי של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$".
3. $\limsup$ או $\overline{\lim}$ הוא הגבול החלקי הגדול ביותר; $\liminf$ או $\underline{\lim}$ הוא הגבול החלקי הקטן ביותר.

<u>משפט אפיון</u>

L הוא גבול חלקי של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם ורק אם בכל סביבת ε של L יש אינסוף איברים של הסדרה.

<u>תרגיל</u>

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה $a_n = \frac{5^n + (-5)^n}{4^n}$ וציינו מהם $\overline{\lim}, \underline{\lim}$.

<u>פתרון</u>

עבור n זוגי: $a_{2n} = 2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{2n}$ וקל לראות ש- $a_{2n}\to\infty$. עבור n אי זוגי: $a_{2n+1} = 0$.

נראה שאין גבולות חלקיים אחרים פרט ל- $0,\infty$. יהי $0 < L \in \mathbb{R}$ גבול חלקי של הסדרה. לכן, לפי משפט האפיון, בכל סביבת ε של L יש אינסוף איברי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נבחר $\varepsilon = L$. עבור n אי זוגי $a_n = 0 \notin (0,2L)$. עבור $n = 2k$

הסדרה a_{2k} שואפת לאינסוף ולכן לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים k_0 כך שלכל $k\geq k_0$ מתקיים $a_{2k}>M$. נבחר $M=2L$ ונקבל שלכל היותר k_0 מאיברי הסדרה נמצאים בסביבה הנתונה $(0,2L)$. לכן, L אינו גבול חלקי.

לבסוף, $\liminf=0,\ \limsup=\infty$ (ולכן, אגב, הסדרה אינה מתכנסת).

מש"ל

<u>טענה</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. ונניח ש- $a_{2k}\to L, a_{2k+1}\to M$. נראה ש- L,M הם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה.

<u>פתרון</u>

תהי סדרה חלקית $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל T. נוכיח שבהכרח $T=L$ או $T=M$.

בתוך קבוצת האינדקסים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ יש בהכרח אינסוף איברים זוגיים או אינסוף איברים אי-זוגיים. אכן, אחרת מספר האינדקסים הזוגיים הוא סופי וכן מספר האינדקסים האי זוגים הוא סופי. אבל אז נקבל שהקבוצה $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סופית. מכיון שעפ"י הגדרת תת סדרה כל האיברים ב $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ שונים אז ברור שיש בה אינסוף איברים. נמשיך כעת לפי המצבים האפשריים:

א) ב $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ יש אינסוף איברים זוגיים. ברור שיש ל $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה $\{n_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ שכל איבריה זוגיים. מתקיים $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ולכן $\lim\limits_{l\to\infty}a_{n_{k_l}}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=T$. מצד שני ברור ש $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ ולכן $\lim\limits_{l\to\infty}a_{n_{k_l}}=L$. מיחידות הגבול נקבל ש $T=L$.

ב) ב $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ יש אינסוף איברים אי זוגיים. תהליך דומה לסעיף (א) יוביל למסקנה $T=M$.

מש"ל

<u>מסקנות</u>

1) מההוכחה קל לראות שאם $L\neq M$ אז כל תת סדרה שבה אינסוף איברים מהמקומות הזוגיים וגם אינסוף איברים מהמקומות האי זוגיים תתבדר. (כי לפי מה שתיארנו קודם היא צריכה להתכנס גם ל L וגם ל M וזה בלתי אפשרי).

2) אם בסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, סדרת הזוגיים מתכנסת לגבול L וסדרת האי זוגיים מתכנסת לגבול M אז לסדרה בדיוק שני גבולות חלקיים אם $L \neq M$. לסדרה גבול חלקי יחיד והיא מתכנסת אם $L = M$.