תרגיל בית 9 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

זמני עצירה

תרגיל 1. נתבונן בהילוך מקרי פשוט S_n על $\mathbb{Z}$ ובשני זמני העצירה

$$\tau_{88} = \min\{n \geq 0 \mid S_n = 88\}$$
$$\tau = \tau_{88} \wedge \tau_{-373} = \min\{n \geq 0 \mid S_n = 88 \text{ או } S_n = -373\}$$

לכל אחד מהמאורעות הבאים, קבעו האם הוא נמצא ב-$\mathcal{F}_{\tau_{88}}$ או ב-$\mathcal{F}_\tau$, ונמקו:

א. $A_1 = \{\exists n \geq 0 : S_n = 10\}$.

ב. $A_2 = \{\exists n \geq 0 : S_n = 88373\}$.

ג. $A_3 = \{\exists n \geq 0 : S_n > 0\}$.

תרגיל 2. יהיו τ, τ' זמני עצירה ביחס לפילטרציה $\{\mathcal{F}_n\}$. הוכיחו את שתי הטענות שהזכרנו בתרגול:

א. τ הוא $\mathcal{F}_\tau$-מדיד.

ב. אם $\tau \overset{\text{a.s.}}{\leq} \tau'$, אז $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau'}$.

תרגיל 3. מבצעים הילוך מקרי על $\mathbb{Z}$ שמתחיל ב-50. נחשוב על ההילוך בתוך הקטע $[0, 100]$. מה הסיכוי שההילוך יגיע ל-45, אז ל-55 ואז יחזור ל-45 לפני שיגיע לאחד מקצוות הקטע?

תרגיל 4. נתבונן בהילוך מקרי מוטה על $\mathbb{Z}$, עם הסתברות $p > \frac{1}{2}$ להתקדם צעד אחד ימינה והסתברות $q = 1 - p$ להתקדם צעד אחד שמאלה. עבור $a, b > 0$, ראינו בתרגול מה הסיכוי שיגיע ל-$(-a)$ לפני שיגיע ל-b.

א. כמה זמן בתוחלת ייקח לו להגיע לאחד מקצוות הקטע $[-a, b]$? (פה כדאי להשתמש במרטינגל הלא אקספוננציאלי)

ב. כמה זמן ייקח לו להגיע ל-b?

תרגיל 5. הסיקו מאי-שוויון דוב את אי-שוויון קולמוגורוב: אם $X_1, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי-תלויים עם תוחלת 0, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_k$ ו-$\lambda > 0$, אז

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Var}(S_n) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i).$$

תרגיל 6. היעזרו באי-שוויון קולמוגורוב על מנת להוכיח את **משפט שני הטורים של קולמוגורוב**:
יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי-תלויים עם תוחלות μ_n ושונויות σ_n^2 סופיות. אם $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ מתכנס כמעט תמיד. ראינו בעבר שהמאורע שהטור מתכנס הוא מאורע $0 - 1$, והמשפט הזה מציג לנו קריטריון מספיק להתכנסות כמעט תמיד.

(רמז: הוכיחו שסדרת הסכומים החלקיים היא סדרת קושי כמעט תמיד, על ידי כך שתבחרו $\varepsilon > 0$, ותראו שלכל $N \in \mathbb{N}$ מתקיים $P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n - S_N| \geq \lambda\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.)

הערה: הזכרנו בתרגול קריטריון הכרחי ומספיק להתכנסות של טור משתנים מקריים, שנקרא **משפט שלושת הטורים של קולמוגורוב**. אתם מוזמנים לקרוא עליו בקישור הזה.

תרגיל 7. יהי S_n הילוך מקרי מוטה על $\mathbb{Z}$. הוכיחו שהמרטינגל האקספוננציאלי המתאים לו מתכנס, וקבעו מהו הגבול.

בהצלחה!