

אינפי 2 - תרגיל מספר 4

1. הוכיחו או הפריכו בדוגמא נגדית :

- א. אם ל- f יש קדומה בקטע $[a, b]$ ויש קדומה בקטע $(b, c]$, אז יש לה קדומה בקטע $[a, c]$.
 ב. אם F קדומה של f בקטע $[0, 1]$ ו- G קדומה שלה בקטע $(1, 2]$ אז :

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in [0, 1] \\ G(x), & x \in (1, 2] \end{cases} \text{ קדומה של } f \text{ בקטע } [0, 2].$$

ג. לפונקציה : $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\sin x}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ אין קדומה בתחום $x \geq 0$.

(תזכורת : אם f גזירה בקטע $[a, b]$ ו- α ערך בין $f_+^{(1)}(a)$ ל- $f_-^{(1)}(b)$ אז יש נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f^{(1)}(c) = \alpha$).

2. חשבו את : $\int \max(x, x^2) dx$.

3. מציאו נוסחא רקורסיבית עבור : $I_m = \int x^\alpha \ln^m(x) dx, \alpha \neq -1$

4. חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{e^x}{e^x + \sqrt{e^x}} dx \quad \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx \quad \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx$$

$\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x - 1}} dx$ (נסו הצבה : $t^2 = \frac{e^x - 1}{e^x - 1}$, $x = ?$ - מספיק להגיע לאינטגרל פונקציה

רציונלית - ללא פיתרון שלו !) $\int \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$ $\int \frac{dx}{1+e^x}$

5. הוכיחו את גירסת חילוף המשתנה ("אינטגרציה בהצבה") הבאה (אותה נתרגל במפגש הבא) :

נניח נתון אינטגרל שיש לחשב : $\int f(x) dx$. אז, אם נשתמש בהצבה : $x = \varphi(t)$, כך שהפונקציה φ הפיכה וגזירה, וכך שידועים פונקציה קדומה $F(t)$ לפונקציה $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (כלומר - שקיים $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(t)$) : האינטגרל שלנו ניתן לחישוב על ידי :

$$\int f(x) dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

