

שאלות למבחן

תרגיל 3

1. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x - ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n .

א. הראו כי B הינה מדידה לבג. (רמז: הציגו את B כך $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$)

ב. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n , הראו כי $m(B) > \delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אז $m(B) = 0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ אבל $m(B) = 0$.

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את B בצורה הבאה:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה x -ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה $\{A_n\}$. ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא-אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן

$$E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

נקבל שהסדרה $\{E_k\}$ הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה B הינה

מדידה שכחיתוך של מדידות.

- ב. נשים לב כי $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ וגם מתקיים כי $m(E_1) \leq 1$ שכן $E_1 \subseteq [0,1]$. ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$\begin{aligned} m(B) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) \geq \delta \end{aligned}$$

- ג. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ נובע כי $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} m(A_n) = 0$. ברור כי $m(E_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} m(A_n)$

שוב,

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \\ \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} m(A_n) = 0$$

ניקח את $A_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$. קל לראות כי $m(A_n) = \frac{1}{n}$ וכי $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ מצד

שני $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_k$ ולכן

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$

2. יהיו $\mathcal{A}_1$ ו $\mathcal{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

פתרון: מכיוון ש $\mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ נובע כי

$\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ מכיוון ש $\mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ נובע כי הסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה את $\mathcal{A}_2$ מוכלת ב $\sigma(\mathcal{A}_1)$, כלומר - $\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$.
 $\sigma(\mathcal{A}_2) \supseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$: נובע מכך ש $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$.

3. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A \in \sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ כך ש $A \in \sigma(\mathcal{D})$.

פתרון:

א. נסמן ב S קבוצת כל הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את התכונה ונראה כי S הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח $E \in \mathcal{E}$, ברור כי $X \in \sigma(E)$ ומכאן ש $X \in S$.

ii. אם $A \in S$ אזי נובע כי קיימת סדרה $\{E_n\}$ כך ש $E_n \in \mathcal{E}$ וגם $A \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$

מכאן ש $A^c \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ ולכן $A^c \in S$.

iii. תהי $A_n \in S$. נובע כי לכל n קיימת סדרה $\{E_n^k\}$ של קבוצות כך ש $E_k^n \in \mathcal{E}$ וגם

$A_n \in \sigma(E_k^n, k \in \mathbb{N})$. קל לראות כי אז $\{E_k^n\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ הינה בת מנייה וכן

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in S \text{ ולכן } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(E_k^n, n, k \in \mathbb{N})$$

מכאן ש S הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל $E \in \mathcal{E}$ מתקיים כי $E \in \sigma(E)$ ולכן $E \in S$. מכאן נובע כי $\sigma(E) \subseteq S$ וסיימנו.

4. נניח $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X, S) ו $\mu_n(A) \uparrow$ לכל $A \in S$ אזי

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \text{ . האם } \mu \text{ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.}$$

פתרון: ברור כי $\mu(A) \geq 0$ לכל $A \in S$ וכי $\mu(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\emptyset) = 0$. נראה כי גם התכונה

השלישית מתקיימת.

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n)$$

$$\text{נסמן את הסכומים החלקיים } c_{ij} = \sum_{n=1}^i \mu_j(A_n) \text{ מתקיים}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} c_{ij} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{i \in \mathbb{N}} c_{ij}$$

$$= \sup_{i,j \in \mathbb{N}} c_{ij} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{j \in \mathbb{N}} c_{ij} = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} c_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

מש"ל.

תרגיל 4

5. יהי מרחב מדיד (X, S) יהיו f, g פונקציות מדידות S המקבלות ערכים ב $\mathbb{R}$. הראו כי

$$\text{הפונקציה } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} 1_{(g(x) \neq 0)}$$

הינה מדידה S .

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha < 0$, אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$\begin{aligned} h^{-1}((-\infty, \alpha)) &= \{x \in X \mid \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) < g(x)\alpha\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) > g(x)\alpha\} \cap \{g(x) < 0\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha < 0\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha > 0\} \cap \{g(x) < 0\} \end{aligned}$$

מכיוון שהפונקציה $f - \alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.

תרגיל 5

6. תהי $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n \rightarrow f$ במידה שווה. הראו כי אם

$$\mu(X) < \infty \text{ אזי } f \text{ אינטגרבילית וגם } \int f_n \rightarrow \int f$$

פתרון: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int \liminf f_n = \int f \leq \limsup \int f_n < \infty$ ומכאן ש f אינטגרבילית.

מכיוון שההתכנסות הינה במידה שווה, נובע כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n גדול מספיק עבורו

$$|f - f_n| < \varepsilon \text{ לכל } x. \text{ מכאן ש } \int |f - f_n| < \varepsilon \mu(X). \text{ מכיוון שהדבר נכון לכל } \varepsilon \text{ נובע כי}$$

$$\int |f - f_n| = 0. \text{ נשים לב כי}$$

$$\left| \int f - \int f_n \right| \leq \int |f - f_n|$$

תרגיל 6

7. נניח כי $f, f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ הינן פונקציות מדידות בממ"ח (X, S, μ) . $f_n \rightarrow f$ כב"מ ו

$$\int f_n \rightarrow \int f < \infty. \text{ הוכיחו כי } \int_A f_n \rightarrow \int_A f \text{ עבור כל } A \in S.$$

פתרון: מכיוון שהפונקציות f_n חיוביות מתקיים כי $f_n 1_A \leq f_n$ עבור כל $A \in S$. מכאן שמתקיימים כל התנאים להתכנסות הנשלטת המוכללת ולכן

$$\lim \int_A f_n = \lim \int f_n 1_A = \int \lim f_n 1_A = \int f 1_A = \int_A f$$

8. (משפט לוסין) תהי $f = 1_A$ פונקצית דריכלה בקטע $[0, 1]$, כלומר, $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. הוכיחו

כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה סגורה F (מצאו את F ממש) בקטע $[0, 1]$ כך שהצמצום

$$\text{של } f \text{ על } F \text{ הינה פונקציה רציפה ומתקיים } m([0, 1] \setminus F) < \varepsilon.$$

פתרון: נגדיר את סדרת הרציונאליים ב $\mathbb{R}$ $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ונגדיר את הקטע

$$m\left(\bigcup_i I_i\right) \leq \sum_i m(I_i) = \varepsilon \text{ וכי } m(I_i) = \varepsilon 2^{-i} \text{ , ברור כי } I_i = (q_i - \varepsilon 2^{-i-1}, q_i + \varepsilon 2^{-i-1})$$

נגדיר את $F = [0,1] \setminus \bigcup_i I_i$ ונשים לב כי , כי הקבוצה F סגורה ואינה מכילה ראציונליים

$$\text{ומכיון ש } m(F) = m\left([0,1] \setminus \bigcup_i I_i\right) > 1 - \varepsilon \text{ נובע ש } m([0,1] \setminus F) < \varepsilon \text{ . בנוסף הצמצום}$$

של f על F הינה פונקציה קבועה ולכן רציפה. מכאן ש F הינה הפונקציה הנדרשת.

$$9. \text{ תהי } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: } \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dm = 0$$

רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

פתרון: אנו יודעים כי מכיון ש f אינטגרבילית אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימת פונקציה g רציפה אשר

מתאפסת מחוץ לקטע חסום כך ש $\int |f(x) - g(x)| dm < \varepsilon$. נבנה סדרה g_n של פונקציות

$$\text{רציפות כאלו כך ש } \int |f(x) - g_n(x)| dm < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ . מכאן נובע כי}$$

$$\begin{aligned} & \int |f(x-h) - f(x) - (g_n(x-h) - g_n(x))| dm \\ & \leq \int |f(x-h) - g_n(x-h)| dm + \int |f(x) - g_n(x)| dm < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

עכשיו, נשים לב כי מכיון ש $|g_n(x-h) - g_n(x)| < |g_n(x-h)| + |g_n(x)|$, עפ"י משפט

ההתכנסות הנשלטת ורציפות הפונקציה g נובע כי

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |g_n(x-h) - g_n(x)| dm \\ & = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} |g_n(x-h) - g_n(x)| dm = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 \end{aligned}$$

מכאן ש

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dm < \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |g_n(x-h) - g_n(x)| dm + \frac{1}{2^n} \\ & = 0 + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

נשאיף את n לאינסוף ונקבל את התוצאה.

תרגיל 8

10. התסתכלו על הפונקציה הבאה המוגדרת על $[-1,1]$:

$$f = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- א. האם הפונקציה גזירה?
- ב. האם הפונקציה רציפה ליפשיץ?
- ג. האם לפונקציה השתנות חסומה?

פתרון:

א. הפונקציה כמובן גזירה והנגזרת הינה

$$f' = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

נראה רק כי הפונקציה אכן גזירה ב $x = 0$. מתקיים $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = 0$

ב. מכיוון שהנגזרת f' איננה חסומה בקטע $[-1,1]$ נובע כי לכל $M, \varepsilon > 0$ קיים

$$-1 \leq x_0 \leq 1 \text{ כך ש } f'(x_0) > M + \varepsilon \text{ מכאן שקיים } h > 0 \text{ כך ש}$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > M \text{ ומכאן שהפונקציה איננה רציפה ליפשיץ.}$$

ג. מספיק לבדוק מהן התנודות בין הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת. נשווה את הנגזרת ל 0 ונקבל

$$2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$$

עבור $x \approx 0$ נקבל כי $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ ולכן פתרונות המשוואה באופן אסימפטוטי יהיו

$$\frac{1}{x^2} \approx \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ עבור } k \in \mathbb{Z} \text{ גדול. מכאן ש } x \approx \sqrt{\frac{2}{\pi + 2\pi k}} \text{ ולכן התנודות סביב הנקודה}$$

$x = 0$ של הפונקציה יהיו

$$TV(f) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi + 2\pi(k+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi(k+1)\right) - \frac{2}{\pi + 2\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi + 2\pi 2k} + \frac{2}{\pi + 2\pi(2k-1)}$$

ברור כי הטור האחרון מתבדר כמו טור הרמוני ולכן לפונקציה אין השתנות חסומה.

11. נניח f הינה פונקציה רציפה על $[0,1]$ ו f רציפה בהחלט על $(a,1]$ לכל $a \in (0,1)$. האם

f בהכרח רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם בנוסף f הינה בעלת השתנות חסומה ב $[0,1]$ האם אז f הינה רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם לא, תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ניקח לדוגמא את הפונקציה בשאלה הראשונה. מכיון ש f תהיה אז גזירה ברציפות בקטע $(a,1]$ לכל $a \in (0,1)$ אזי היא רציפה ליפשיץ ולכן רציפה בהחלט. אבל מכיון שאיננה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ אז נובע כי איננה רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$. לעומת זאת, אם בנוסף f בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$ נובע כי f גזירה בקטע $[0,1]$ ולכן

$$\int_0^x f' \leq f(x) - f(0) \quad \text{אבל } f \text{ רציפה בהחלט על } (a,1] \text{ ולכן}$$

$$\int_0^x f' = \int_0^a f' + \int_a^x f' = \int_0^a f' + f(x) - f(a)$$

האינטגרל נובע כי

$$\int_0^x f' = f(x) - f(0) \quad \text{ולכן בסה"כ נקבל כי } \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a f' + f(x) - f(a) = f(x) - f(0)$$

כלומר f רציפה בהחלט.

תרגיל 9

12. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות f_n חיוביות עולות ואינטגרליות רימן אשר מתכנסות נקודתית

לפונקציה f חסומה אך איננה אינטגרלית רימן. תרגיל זה מראה כי משפט ההתכנסות המונוטונית ומשפט ההתכנסות החסומה איננו תקף עבור אינטגרלי רימן.

פתרון: נסתכל על הקטע $[0,1]$ ונסדר את $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ בסדרה $\{q_n\}$. נגדיר את הפונקציות הבאות:

$$f_n = \begin{cases} 1 & x \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ברור כי נקודתית, הסדרה f_n מתכנסת לפונקציה דריכלה. כמו כן, עפ"י משפט שלמדנו פונקציה הינה אינטגרלית רימן אם היא רציפה כב"מ. ולכן f_n אינטגרלית לכל n . אבל פונקציה דריכלה איננה רציפה באף נקודה ולכן איננה אינטגרלית רימן. מכאן שקיימת סדרה של פונקציות אינטגרליות רימן המתכנסות מונוטונית לפונקציה חסומה אך הפונקציה איננה אינטגרלית.

13. נניח $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית, f חסומה על $(a,1]$ לכל $a > 0$ ואינטגרל רימן הלא

$$\text{אמיתי} \lim_{a \rightarrow 0^+} R(f 1_{(a,1]}) \text{ קיים. הראו כי הגבול שווה ל } \int_0^1 f(x) dm$$

פתרון: מכיוון ש $R\left(f 1_{(\frac{1}{n},1]}\right)$ קיים ומכיוון שהפונקציה f חסומה על $(a,1]$ לכל $\varepsilon > 0$ נוכל

לבנות סכומי דרבו עליונים אינטגרליים לבג, כלומר נוכל למצוא חלוקה $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m\}$

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^m \left(\sup_{x_{i-1} \leq y \leq x_i} f(y) \right) 1_{[x_{i-1}, x_i)}(x) \quad \text{כך ש} \quad R(f_n) - R\left(f 1_{(\frac{1}{n},1]}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{נסמן}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} R(f 1_{(a,1]}) = I \quad \text{ונובע שלכל} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{קיים} \quad I - R\left(f 1_{(\frac{1}{n},1]}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{וכן} \quad f_n \text{ סכום דרבו עליון} \quad \text{כך}$$

$$\text{ש} \quad R(f_n) - R\left(f 1_{(\frac{1}{n},1]}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ולכן} \quad R(f_n) \rightarrow I \quad \text{מכיוון ש} \quad f_n \geq f 1_{(\frac{1}{n},1]} \quad \text{עפ"י DCT נובע כי}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} R(f 1_{(a,1]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f 1_{(\frac{1}{n},1]} dm = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f 1_{(\frac{1}{n},1]} dm = \int_0^1 f dm$$

תרגיל 10

14. תהי A תת קבוצה של $[0,1]^2$ מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה

$m_2(A) = 1$ כאשר $m_2 = m \times m$ ו m הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל $x \in [0,1]$ הקבוצה

$$s_x(A) = \{y : (x,y) \in A\} \quad \text{הינה בעלת מידה} \quad m(s_x(A)) = 1$$

פתרון: ברור כי הפונקציה 1_A הינה מדידה לבג ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה של $[0,1]^2$. כמו

כן נובע כי

$$\int_{[0,1]^2} 1_A(x,y) dm_2(x,y) = m_2(A) = 1 < \infty$$

עפ"י משפט טונלי נקבל כי

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} 1_{s_x(A)}(x,y) m(dy) \right) m(dx) = \int_{[0,1]} m(s_x(A)) m(dx) = 1$$

נובע כי

$$\int_{[0,1]} (1 - m(s_x(A))) m(dx) = 0$$

מכיון ש $s_x(A) \subseteq [0,1]$ נובע כי $m(s_x(A)) \leq 1$ ולכן $1 - m(s_x(A)) \geq 0$ לכל $x \in [0,1]$.
 ראינו כבר כי אם $f \geq 0$ כב"מ וגם $\int f d\mu = 0$ אזי נובע כי $f = 0$ כב"מ. מכאן ש
 $1 - m(s_x(A)) = 0$ כב"מ ולכן $1 = m(s_x(A))$ כב"מ.

תרגיל 11

15. הוכיחו כי קבוצת הפונקציות הפשוטות צפופה ב L^p עבור $p \geq 1$.

פתרון: תהי $f \in L^p$ $\left(\int |f|^p d\mu < \infty\right)$ חיובית. אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות φ_n כך
 ש $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ ו $\varphi_n \rightarrow f$ עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n^p d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^p d\mu = \int f^p d\mu$$

ראינו בהרצאה את אי השוויון $|a+b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$. נגדיר את $g_n = 2^p (|\varphi_n|^p + |f|^p)$.
 ברור כי לכל n g_n אינגרבילית וכן כי $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 2^{p+1} |f|^p$ אינטגרבילית. מכאן, עפ"י
 משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - \varphi_n|^p d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} |f - \varphi_n|^p d\mu = 0$$

כללית, נשתמש בא"ש מינקובסקי על מנת לקבל

$$\|f^+ - f^- - (\varphi_n^+ - \varphi_n^-)\|_p \leq \|f^+ - \varphi_n^+\|_p + \|\varphi_n^- - f^-\|_p \rightarrow 0$$

16. הראו כי L^∞ הינו מרחב שלם.

פתרון: עפ"י מה שראינו בכיתה מספיק להראות כי כל טור ב L^∞ שמתכנס בהחלט מתכנס. נניח
 ו $f_n \in L^\infty$, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$. נגדיר את $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ולכל f_n נגדיר את הקבוצה
 $E_n = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$. ברור כי $m(E_n) = 0$ וגם כי $m\left(\bigcup_n E_n\right) = 0$.

. מן ההגדרה של $\|\cdot\|_\infty$ נובע כי $f(x)$ מתכנס בהחלט כב"מ (על E) ולכן גם מתכנס כב"מ. נראה כי $f \in L^\infty$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in E^c} |f(x)| &\leq \sup_{x \in E^c} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E^c} |f_n(x)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

ומכאן ש $f \in L^\infty$.

תרגיל 12

17. יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות כך ש $\mu \ll \nu$ ו $\mu = g d\nu$. הראו כי אם f פונקציה אינטגרלית ביחס למידה μ אזי היא אינטגרלית ביחס למידה ν ומתקיים

$$\int f g d\nu = \int f d\mu$$

פתרון: נרשום $f = f^+ + f^-$. נקרב את f^+ ע"י פונקציות פשוטות φ_n כך ש $\int \varphi_n d\mu \uparrow \int f d\mu$. נשים לב כי עבור כל פונקציית אינדיקטור מתקיים $\int 1_A f d\nu = \int 1_A d\mu$. ולכן הדבר נכון גם עבור פונקציות פשוטות. מכאן שמתקיים $\int f^+ g d\nu = \lim_{MCT} \int \varphi_n g d\nu = \lim \int \varphi_n d\mu = \int f^+ d\mu$. נראה את אותו הדבר עבור f^- וסיימנו.

18. נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות סיגמא סופיות כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ . תהי

$$\rho = \mu + \nu. \text{ שימו לב כי } \mu \ll \rho \text{ וגם } \nu \ll \rho. \text{ הוכיחו כי אם } f = \frac{d\mu}{d\rho} \text{ ו } g = \frac{d\nu}{d\rho} \text{ אזי}$$

$$\text{א. } f > 0 \text{ כב"מ } \mu.$$

$$\text{ב. } f + g = 1 \text{ כב"מ } \rho.$$

$$\text{ג. } d\nu = \frac{g}{f} d\mu.$$

פתרון:

א. מהנתון כי $\mu \ll \nu$ נובע כי $\rho \ll \mu$. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי לכל A מדידה מתקיים

$$\mu(A) = \int_A f d\rho$$

נניח בשלילה ש א' אינו מתקיים. אזי קיימת בהכרח קבוצה מדידה E כך ש $\mu(E) > 0$ וגם $f = 0$ על E . אבל אז $\int_A f d\rho = 0$. בסתירה להנחה ש $\mu(E) > 0$.

ב. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי $\mu(A) = \int_A f d\rho$ וגם כי $\nu(A) = \int_A g d\rho$ לכל A מדידה. ע"י קירוב של פונקציות פשוטות נראה כי אם $z(x)$ פונקציה מדידה אזי נובע כי $\int z d\nu < \infty$ וגם $\int z d\mu < \infty$ אזי $\int z d\mu = \int z f d\rho$ וגם $\int z d\nu = \int z g d\rho$. מכאן שעבור כל A מדידה נובע כי

$$\begin{aligned} \int 1_A (f + g) d\rho &= \int 1_A f d\rho + \int 1_A g d\rho \\ &= \mu(A) + \nu(A) = \rho(A) = \int 1_A d\rho \end{aligned}$$

לכן נובע כי $f + g = 1$ כב"מ ρ .

ג. עפ"י משפט רדון ניקודים והנתון, נובע כי קיימת פונקציה חיובית h כך ש $\nu(A) = \int_A h d\mu$ לכל A מדידה. מצד שני

$$\begin{aligned} \int 1_A g d\rho &= \nu(A) = \int 1_A h d\mu = \\ \int 1_A h d\mu &= \int 1_A h f d\rho \end{aligned}$$

ומכאן ש כב"מ ρ $h = \frac{g}{f} \Leftarrow g = fh$.