

## שאלות למבחן

### תרגיל 3

1. תהי  $m$  מידת לבג. נניח כי לכל  $n$   $A_n$  הינה קבוצה מדידה ב  $[0,1]$ . תהי  $B$  קבוצת כל ה  $x$  - ים המופיעים באינסוף קבוצות  $A_n$ .

א. הראו כי  $B$  הינה מדידה לבג. (רמז: הציגו את  $B$  כך  $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ )

ב. אם  $m(A_n) > \delta > 0$  לכל  $n$ , הראו כי  $m(B) > \delta$ .

ג. אם  $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) < \infty$  אז  $m(B) = 0$ .

ד. תנו דוגמא למקרה בו  $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$  אבל  $m(B) = 0$ .

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את  $B$  בצורה הבאה:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה  $x$  -ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה  $\{A_n\}$ . ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא-אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן

$$E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה  $B$  הינה

מדידה שכחיתוך של מדידות.

- ב. נשים לב כי  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$  וגם מתקיים כי  $m(E_1) \leq 1$  שכן  $E_1 \subseteq [0,1]$ . ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$\begin{aligned} m(B) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) \geq \delta \end{aligned}$$

ג. מכיוון ש  $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) < \infty$  נובע כי  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} m(A_n) = 0$ . ברור כי  $m(E_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} m(A_n)$

שוב,

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \\ \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} m(A_n) = 0$$

ניקח את  $A_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$ . קל לראות כי  $m(A_n) = \frac{1}{n}$  וכי  $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$  מצד

שני  $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_k$  ולכן

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$

2. יהיו  $\mathcal{A}_1$  ו  $\mathcal{A}_2$  שתי משפחות של קבוצות ב  $X$ . הראו כי אם  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$  אזי נובע כי  $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$ .

פתרון: מכיון ש  $\mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$  נובע כי

$\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$  מכיון ש  $\mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$  נובע כי הסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה את  $\mathcal{A}_2$  מוכלת ב  $\sigma(\mathcal{A}_1)$ , כלומר  $\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ .  
 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$  נובע מכך ש  $\sigma(\mathcal{A}_2) \supseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ .

3. תהי  $\mathcal{E}$  משפחה כלשהי של קבוצות ב  $X$ . הראו כי לכל  $A \in \sigma(\mathcal{E})$  קיימת משפחה בת מנייה  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$  כך ש  $A \in \sigma(\mathcal{D})$ .

פתרון:

א. נסמן ב  $S$  קבוצת כל הקבוצות ב  $\sigma(\mathcal{E})$  המקיימות את התכונה ונראה כי  $S$  הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח  $E \in \mathcal{E}$ , ברור כי  $X \in \sigma(E)$  ומכאן ש  $X \in S$ .

ii. אם  $A \in S$  אזי נובע כי קיימת סדרה  $\{E_n\}$  כך ש  $E_n \in \mathcal{E}$  וגם  $A \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$

מכאן ש  $A^c \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$  ולכן  $A^c \in S$ .

iii. תהי  $A_n \in S$ . נובע כי לכל  $n$  קיימת סדרה  $\{E_n^k\}$  של קבוצות כך ש  $E_k^n \in \mathcal{E}$  וגם

$A_n \in \sigma(E_k^n, k \in \mathbb{N})$ . קל לראות כי אז  $\{E_k^n\}_{n,k \in \mathbb{N}}$  הינה בת מנייה וכן

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in S \text{ ולכן } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(E_k^n, n, k \in \mathbb{N})$$

מכאן ש  $S$  הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל  $E \in \mathcal{E}$  מתקיים כי  $E \in \sigma(E)$  ולכן  $E \in S$ . מכאן נובע כי  $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq S$  וסיימנו.

4. נניח  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  הינן מידות על מרחב מדיד  $(X, S)$  ו  $\mu_n(A) \uparrow$  לכל  $A \in S$  אזי

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \text{ . האם } \mu \text{ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.}$$

פתרון: ברור כי  $\mu(A) \geq 0$  לכל  $A \in S$  וכי  $\mu(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\emptyset) = 0$ . נראה כי גם התכונה

השלישית מתקיימת.

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n)$$

נסמן את הסכומים החלקיים  $c_{ij} = \sum_{n=1}^i \mu_j(A_n)$  מתקיים

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j(A_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} c_{ij} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{i \in \mathbb{N}} c_{ij}$$

$$= \sup_{i,j \in \mathbb{N}} c_{ij} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{j \in \mathbb{N}} c_{ij} = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} c_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

מש"ל.

#### תרגיל 4

5. יהי מרחב מדיד  $(X, S)$  ויהיו  $f, g$  פונקציות מדידות  $S$  המקבלות ערכים ב  $\mathbb{R}$ . הראו כי

$$\text{הפונקציה } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} 1_{(g(x) \neq 0)}$$

הינה מדידה  $S$ .

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי  $\alpha < 0$ , אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$\begin{aligned} h^{-1}((-\infty, \alpha)) &= \{x \in X \mid \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) < g(x)\alpha\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) > g(x)\alpha\} \cap \{g(x) < 0\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha < 0\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha > 0\} \cap \{g(x) < 0\} \end{aligned}$$

מכיון שהפונקציה  $f - \alpha g$  הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש  $h$  מדידה.

## תרגיל 5

6. תהי  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  סדרה של פונקציות אינטגרביליות כך ש  $f_n \rightarrow f$  במידה שווה. הראו כי אם  $\mu(X) < \infty$  אזי  $f$  אינטגרבילית וגם  $\int f_n \rightarrow \int f$ .

פתרון: מכיון שההתכנסות הינה במ"ש נובע כי לכל  $x$ , עבור  $n$  גדול מספיק  $|f| \leq |f_n| + \varepsilon$  ומכאן ש  $f$  אינטגרבילית. מכיון שההתכנסות הינה במידה שווה, נובע כי לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $n$  גדול מספיק עבורו  $|f - f_n| < \varepsilon$  לכל  $x$ . מכאן ש  $\int |f - f_n| < \varepsilon \mu(X)$ . מכיון שהדבר נכון לכל  $\varepsilon$  נובע כי  $\int |f - f_n| = 0$ . נשים לב כי  $|\int f - f_n| \leq \int |f - f_n|$  וסיימנו.

## תרגיל 6

7. נניח כי  $f, f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  הינן פונקציות מדידות בממ"ח  $(X, S, \mu)$ .  $f_n \rightarrow f$  כב"מ ו  $\int f_n \rightarrow \int f < \infty$ . הוכיחו כי  $\int_A f_n \rightarrow \int_A f$  עבור כל  $A \in S$ .

פתרון: מכיון שהפונקציות  $f_n$  חיוביות מתקיים כי  $f_n 1_A \leq f_n$  עבור כל  $A \in S$ . מכאן שמתקיימים כל התנאים להתכנסות הנשלטת המוכללת ולכן

$$\lim \int_A f_n = \lim \int f_n 1_A = \int \lim f_n 1_A = \int f 1_A = \int_A f$$

8. (משפט לוסין) תהי  $f = 1_A$  פונקצית דריכלה בקטע  $[0, 1]$ , כלומר,  $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ . הוכיחו כי לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת קבוצה סגורה  $F$  (מצאו את  $F$  ממש) בקטע  $[0, 1]$  כך שהצמצום של  $f$  על  $F$  הינה פונקציה רציפה ומתקיים  $m([0, 1] \setminus F) < \varepsilon$ .

פתרון: נגדיר את סדרת הרציונאליים ב  $\mathbb{R}$   $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  ונגדיר את הקטע

$$I_i = (q_i - \varepsilon 2^{-i-1}, q_i + \varepsilon 2^{-i-1}) \text{ , ברור כי } m(I_i) = \varepsilon 2^{-i} \text{ וכי } m\left(\bigcup_i I_i\right) \leq \sum_i m(I_i) = \varepsilon$$

נגדיר את  $F = [0,1] \setminus \bigcup_i I_i$  ונשים לב כי , כי הקבוצה  $F$  סגורה ואינה מכילה ראציונליים

$$m(F) = m\left([0,1] \setminus \bigcup_i I_i\right) > 1 - \varepsilon \text{ נובע ש } m([0,1] \setminus F) < \varepsilon \text{ . בנוסף הצמצום}$$

של  $f$  על  $F$  הינה פונקציה קבועה ולכן רציפה. מכאן ש  $F$  הינה הפונקציה הנדרשת.

$$9. \text{ תהי } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: } \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dm = 0$$

רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

פתרון: אנו יודעים כי מכיון ש  $f$  אינטגרבילית אז לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת פונקציה  $g$  רציפה אשר

מתאפסת מחוץ לקטע חסום כך ש  $\int |f(x) - g(x)| dm < \varepsilon$  . נבנה סדרה  $g_n$  של פונקציות

$$\text{רציפות כאלו כך ש } \int |f(x) - g_n(x)| dm < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ . מכאן נובע כי}$$

$$\begin{aligned} & \int |f(x-h) - f(x) - (g_n(x-h) - g_n(x))| dm \\ & \leq \int |f(x-h) - g_n(x-h)| dm + \int |f(x) - g_n(x)| dm < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

מכאן נובע כי ההתכנסות היא ב  $L_1$  . מכיון שיש גם התכנסות נקודתית נובע כי

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x-h) - g_n(x) dm \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x-h) - f(x) dm$$

עכשיו, נשים לב כי מכיון ש  $|g_n(x-h) - g_n(x)| < |g_n(x-h)| + |g_n(x)|$  , עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת ורציפות הפונקציה  $g$  נובע כי

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g_n(x-h) - g_n(x) dm \\ & = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} (g_n(x-h) - g_n(x)) dm = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 \end{aligned}$$

מכאן ש

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-h) - f(x) dm - \int_{\mathbb{R}} g_n(x-h) - g_n(x) dm \right| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dm \right| + 0 \leq \frac{1}{2^n}$$

נשאיף את  $n$  לאינסוף ונקבל את התוצאה.

## תרגיל 8

10. התסתכלו על הפונקציה הבאה המוגדרת על  $[-1,1]$  :

$$f = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- א. האם הפונקציה גזירה?
- ב. האם הפונקציה רציפה ליפשיץ?
- ג. האם לפונקציה השתנות חסומה?

פתרון:

א. הפונקציה כמובן גזירה והנגזרת הינה

$$f' = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

נראה רק כי הפונקציה אכן גזירה ב  $x = 0$ . מתקיים  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = 0$

ב. מכיוון שהנגזרת  $f'$  איננה חסומה בקטע  $[-1,1]$  נובע כי לכל  $M, \varepsilon > 0$  קיים

$-1 \leq x_0 \leq 1$  כך ש  $f'(x_0) > M + \varepsilon$  מכאן שקיים  $h > 0$  כך ש

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > M \quad \text{ומכאן שהפונקציה איננה רציפה ליפשיץ.}$$

ג. מספיק לבדוק מהן התנודות בין הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת. נשווה את הנגזרת ל 0 ונקבל

$$2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$$

עבור  $x \approx 0$  נקבל כי  $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$  ולכן פתרונות המשוואה באופן אסימפטוטי יהיו

$\frac{1}{x^2} \approx \frac{\pi}{2} + \pi k$  עבור  $k \in \mathbb{Z}$  גדול. מכאן ש  $x \approx \sqrt{\frac{2}{\pi + 2\pi k}}$  ולכן התנודות סביב הנקודה

$x = 0$  של הפונקציה יהיו

$$\begin{aligned} TV(f) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi + 2\pi(k+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi(k+1)\right) - \frac{2}{\pi + 2\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi + 2\pi 2k} + \frac{2}{\pi + 2\pi(2k-1)} \end{aligned}$$

ברור כי הטור האחרון מתבדר כמו טור הרמוני ולכן לפונקציה אין השתנות חסומה.

11. נניח  $f$  הינה פונקציה רציפה על  $[0,1]$  ו  $f$  רציפה בהחלט על  $(a,1]$  לכל  $a \in (0,1)$ . האם

$f$  בהכרח רציפה בהחלט על  $[0,1]$ ? אם בנוסף  $f$  הינה בעלת השתנות חסומה ב  $[0,1]$  האם אז  $f$  הינה רציפה בהחלט על  $[0,1]$ ? אם לא, תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ניקח לדוגמא את הפונקציה בשאלה הראשונה. מכיוון ש  $f$  תהיה אז גזירה ברציפות בקטע  $(a,1]$  לכל  $a \in (0,1)$  אזי היא רציפה ליפשיץ ולכן רציפה בהחלט. אבל מכיוון שאיננה בעלת השתנות חסומה בקטע  $[0,1]$  אז נובע כי איננה רציפה בהחלט בקטע  $[0,1]$ . לעומת זאת, אם בנוסף  $f$  בעלת השתנות חסומה בקטע  $[0,1]$  נובע כי  $f$  גזירה בקטע  $[0,1]$  ולכן

$$\int_0^x f' \leq f(x) - f(0) \quad \text{אבל } f \text{ רציפה בהחלט על } (a,1] \text{ ולכן}$$

$$\int_0^x f' = \int_0^a f' + \int_a^x f' = \int_0^a f' + f(x) - f(a)$$

האינטגרל נובע כי

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^a f' + f(x) - f(a) = f(x) - f(0) \quad \text{ולכן בסה"כ נקבל כי } \int_0^x f' = f(x) - f(0),$$

כלומר  $f$  רציפה בהחלט.

## תרגיל 9

12. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות  $f_n$  חיוביות עולות ואינטגרביליות רימן אשר מתכנסות נקודתית

לפונקציה  $f$  חסומה אך איננה אינטגרבילית רימן. תרגיל זה מראה כי משפט ההתכנסות המונוטונית ומשפט ההתכנסות החסומה איננו תקף עבור אינטגרלי רימן.

פתרון: נסתכל על הקטע  $[0,1]$  ונסדר את  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$  בסדרה  $\{q_n\}$ . נגדיר את הפונקציות הבאות:

$$f_n = \begin{cases} 1 & x \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ברור כי נקודתית, הסדרה  $f_n$  מתכנסת לפונקציה דריכלה. כמו כן, עפ"י משפט שלמדנו פונקציה הינה אינטגרלית רימן אם"מ היא רציפה כב"מ. ולכן  $f_n$  אינטגרלית לכל  $n$ . אבל פונקציות דריכלה איננה רציפה באף נקודה ולכן איננה אינטגרלית רימן. מכאן שקיימת סדרה של פונקציות אינטגרליות רימן המתכנסות מונוטונית לפונקציה חסומה אך הפונקציה איננה אינטגרלית.

13. נניח  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרלית,  $f$  חסומה על  $(a,1]$  לכל  $a > 0$  ואינטגרל רימן הלא

$$\text{אמיתי} \lim_{a \rightarrow 0^+} R\left(f 1_{(a,1]}\right) = \int_0^1 f(x) dm \text{ הראו כי הגבול שווה ל}$$

פתרון: מכיוון ש  $R\left(f 1_{(\frac{1}{n},1]}\right)$  קיים ומכיוון שהפונקציה  $f$  חסומה על  $(a,1]$  לכל  $\varepsilon > 0$  נוכל

לבנות סכומי דרבו עליונים אינטגרליים לבג, כלומר נוכל למצוא חלוקה  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m\}$

$$R(f_n) - R\left(f 1_{(\frac{1}{n},1]}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ כך ש } f_n(x) = \sum_{i=1}^m \left( \sup_{x_{i-1} \leq y \leq x_i} f(y) \right) 1_{[x_{i-1}, x_i)}(x)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} R\left(f 1_{(a,1]}\right) = I \text{ ונובע שלכל } \varepsilon > 0 \text{ קיים } \frac{\varepsilon}{2} < I - R\left(f 1_{(\frac{1}{n},1]}\right) \text{ וסכום דרבו עליון } f_n \text{ כך}$$

$$\text{ש } R(f_n) - R\left(f 1_{(\frac{1}{n},1]}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ולכן } R(f_n) \rightarrow I \text{ מכיוון ש } f_n \geq f 1_{(\frac{1}{n},1]} \text{ עפ"י DCT נובע כי}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} R\left(f 1_{(a,1]}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f 1_{(\frac{1}{n},1]} dm = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f 1_{(\frac{1}{n},1]} dm = \int_0^1 f dm$$

## תרגיל 10

14. תהי  $A$  תת קבוצה של  $[0,1]^2$  מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה

$m_2(A) = 1$  כאשר  $m_2 = m \times m$  ו  $m$  הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל  $x \in [0,1]$  הקבוצה

$$s_x(A) = \{y : (x, y) \in A\} \text{ הינה בעלת מידה } m(s_x(A)) = 1.$$

פתרון: ברור כי הפונקציה  $1_A$  הינה מדידה לבג ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה של  $[0,1]^2$ . כמו

כן נובע כי

$$\int_{[0,1]^2} 1_A(x, y) dm_2(x, y) = m_2(A) = 1 < \infty$$

עפ"י משפט טונלי נקבל כי

$$\int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} 1_{s_x(A)}(x,y) m(dy) \right) m(dx) = \int_{[0,1]} m(s_x(A)) m(dx) = 1$$

נובע כי

$$\int_{[0,1]} (1 - m(s_x(A))) m(dx) = 0$$

מכיון ש  $s_x(A) \subseteq [0,1]$  נובע כי  $m(s_x(A)) \leq 1$  ולכן  $1 - m(s_x(A)) \geq 0$  לכל  $x \in [0,1]$ .  
 ראינו כבר כי אם  $f \geq 0$  כב"מ וגם  $\int f d\mu = 0$  אזי נובע כי  $f = 0$  כב"מ. מכאן ש  
 $1 - m(s_x(A)) = 0$  כב"מ ולכן  $1 = m(s_x(A))$  כב"מ.

### תרגיל 11

15. הוכיחו כי קבוצת הפונקציות הפשוטות צפופה ב  $L^p$  עבור  $p \geq 1$ .

פתרון: תהי  $f \in L^p$   $\left( \int |f|^p d\mu < \infty \right)$  חיובית. אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות  $\varphi_n$  כך

ש  $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$  ו  $\varphi_n \rightarrow f$  עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n^p d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^p d\mu = \int f^p d\mu$$

ראינו בהרצאה את אי השוויון  $|a+b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$ . נגדיר את  $g_n = 2^p (|\varphi_n|^p + |f|^p)$ .

ברור כי לכל  $n$  אינגרבילית וכן כי  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 2^{p+1} |f|^p$  אינטגרבילית. מכאן, עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - \varphi_n|^p d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} |f - \varphi_n|^p d\mu = 0$$

כללית, נשתמש בא"ש מינקובסקי על מנת לקבל

$$\|f^+ - f^- - (\varphi_n^+ - \varphi_n^-)\|_p \leq \|f^+ - \varphi_n^+\|_p + \|\varphi_n^- - f^-\|_p \rightarrow 0$$

16. הראו כי  $L^\infty$  הינו מרחב שלם.

פתרון: עפ"י מה שראינו בכיתה מספיק להראות כי כל טור ב  $L^\infty$  שמתכנס בהחלט מתכנס. נניח

$f_n \in L^\infty$  , וגם  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$  . נגדיר את  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  ולכל  $f_n$  נגדיר את הקבוצה

$$E_n = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\} . \text{ ברור כי } m(E_n) = 0 \text{ וגם כי } m\left(\bigcup_n E_n\right) = 0 .$$

. מן ההגדרה של  $\|\cdot\|_\infty$  נובע כי  $f(x)$  מתכנס בהחלט כב"מ(על  $E$ ) ולכן גם מתכנס כב"מ. נראה כי  $f \in L^\infty$  ,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in E^c} |f(x)| &\leq \sup_{x \in E^c} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E^c} |f_n(x)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

ומכאן ש  $f \in L^\infty$  .

## תרגיל 12

17. יהיו  $\mu$  ו  $\nu$  שתי מידות חיוביות כך ש  $\mu \ll \nu$  ו  $\mu = g d\nu$  . הראו כי אם  $f$  פונקציה אינטגרלית ביחס למידה  $\mu$  אזי היא אינטגרלית ביחס למידה  $\nu$  ומתקיים

$$\int f g d\nu = \int f d\mu$$

פתרון: נרשום  $f = f^+ + f^-$  . נקרב את  $f^+$  ע"י פונקציות פשוטות  $\varphi_n$  כך ש  $\int \varphi_n d\mu \uparrow \int f d\mu$  . נשים לב כי עבור כל פונקציית אינדיקטור מתקיים  $\int 1_A f d\nu = \int 1_A d\mu$  . ולכן הדבר נכון גם עבור פונקציות פשוטות. מכאן שמתקיים  $\int f^+ g d\nu \stackrel{MCT}{=} \lim \int \varphi_n g d\nu = \lim \int \varphi_n d\mu = \int f^+ d\mu$  . נראה את אותו הדבר עבור  $f^-$  וסיימנו.

18. נניח כי  $\mu$  ו  $\nu$  הינן מידות חיוביות סיגמא סופיות כך ש  $\nu$  הינה רציפה בהחלט ביחס ל  $\mu$  . תהי

$$\rho = \mu + \nu . \text{ שימו לב כי } \mu \ll \rho \text{ וגם כי } \nu \ll \rho . \text{ הוכיחו כי אם } f = \frac{d\mu}{d\rho} \text{ ו } g = \frac{d\nu}{d\rho} \text{ אזי}$$

$$\text{א. } f > 0 \text{ כב"מ } \mu .$$

$$\text{ב. } f + g = 1 \text{ כב"מ } \rho .$$

$$\text{ג. } d\nu = \frac{g}{f} d\mu .$$

פתרון:

א. מהנתון כי  $\mu \ll \nu$  נובע כי  $\rho \ll \mu$ . עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי לכל  $A$  מדידה מתקיים

$$\mu(A) = \int_A f d\rho$$

נניח בשלילה ש  $\mu(E) > 0$  וגם  $f = 0$  על  $E$ . אבל אז  $\mu(E) = \int_A f d\rho = 0$ . בסתירה להנחה ש  $\mu(E) > 0$ .

ב. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי  $\mu(A) = \int_A f d\rho$  וגם כי  $\nu(A) = \int_A g d\rho$  לכל  $A$  מדידה. ע"י קירוב של פונקציות פשוטות נראה כי אם  $z(x)$  פונקציה מדידה אזי נובע כי  $\int z d\nu < \infty$  וגם  $\int z d\mu < \infty$  אזי  $\int z d\mu = \int z f d\rho$  וגם  $\int z d\nu = \int z g d\rho$ . מכאן שעבור כל  $A$  מדידה נובע כי

$$\begin{aligned} \int 1_A (f + g) d\rho &= \int 1_A f d\rho + \int 1_A g d\rho \\ &= \mu(A) + \nu(A) = \rho(A) = \int 1_A d\rho \end{aligned}$$

לכן נובע כי  $f + g = 1$  כב"מ  $\rho$ .

ג. עפ"י משפט רדון ניקודים והנתון, נובע כי קיימת פונקציה חיובית  $h$  כך ש  $\nu(A) = \int_A h d\mu$  לכל  $A$  מדידה. מצד שני

$$\begin{aligned} \int 1_A g d\rho &= \nu(A) = \int 1_A h d\mu = \\ \int 1_A h d\mu &= \int 1_A h f d\rho \end{aligned}$$

ומכאן ש כב"מ  $\rho$   $h = \frac{g}{f} \Leftarrow g = fh$ .