

אינפי 4 - תרגיל 8

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\iint_{A_1} \frac{dS}{\sqrt{z-y+1}}$ כאשר $A_1 = \left\{ (x, y, z) : x \in [0, 1], y \in [0, 1], z = y + \frac{x^2}{2} \right\}$

(ב) $\iint_{A_2} (x^2 + y^2) dS$ כאשר A_2 הוא פנים החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(ג) $\int_T \langle F, \hat{n} \rangle dS$ כאשר:

i. $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ ו- T היא גליל $\{x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$

ii. $F(x, y, z) = (1, 1, 1)$ עם $T = \{1 - 2x^2 - 5y^2 - 2xy = z, z \geq 0\}$

iii. $F(x, y, z) = (x, 0, 1)$ ו- T הוא חלק של המשטח $z = 1 - x^2$ הנמצא בין המישורים $y = 0, z = y$ ומקיים $z \geq 0$

2. יהי R התחום החסום בין הגליל $x^2 + y^2 = 1024$ והמישורים $z = 0, z = 20$. חשבו את $\iint_R F \cdot n dS$ כאשר $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ ו- n נורמל היחידה החיצוני של R .

3. יהי $B(0, R)$ כדור ב- $\mathbb{R}^3$ מרדיוס R . הראה כי כי נפח הכדור שווה למכפלת שטח פניו ב- $\frac{R}{3}$. הצעה: התייחס בתשובתך לנפח של תחום $\mathbb{R}^3 \supseteq D$ בדומה לשטח של תחום $\mathbb{R}^2 \supseteq D$.

4. מרכז הכובד $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ של יריעה $M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $\alpha_i = \frac{\iint_T x_i dS}{\iint_T dS}$. הראה כי מרכז הכובד של פני הכדור שרדיוסו R נמצא במרכזו של הכדור.

5. יהי S^2 ספירת היחידה ב- $\mathbb{R}^3$. חשבו את

$$\iint_{S^2} (x^2 + y + z) dS.$$

עובדה. הלפלסיאן Δ הוא אופרטור המוגדר לפי $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1, \dots, x_n)$ לכל $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

6. יהיו $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרות בתחום $D \subset \mathbb{R}^3$ ובעלת שתי נגזרות חלקיות רציפות במ"ש ב- D . יהי T שפת D .

(א) הראו כי

$$\iiint_D (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx dy dz = \iint_T uv_n dS$$

עבור v_n הנגזרת הכיוונית של v בנקודה (x, y, z) על המשטח בכיוון נורמל היחידה החיצוני בנקודה זו.

(ב) הסיקו בדומה כי

$$\iiint_D (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz = \iint_T (uv_n - vu_n) dS.$$

(ג) הסיקו כי אם $\Delta u = \Delta v = 0$ אז

$$\iint_T uv_n dS = \iint_T vu_n dS.$$

תרגיל. (רשות) יהי $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ דיסק היחידה ב- $\mathbb{R}^2$. תהי $u \in C^2(\mathbb{D})$ פונקציה המוגדרת בדיסק הסגור כך ש:

$$1. u|_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}} \equiv 0.$$

2. $u \neq 0$.

3. קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש- $\Delta u = -\lambda u$.

הראו כי $\lambda > 0$. הצעה: התבוננו ב- $\iint_{\mathbb{D}} \nabla \cdot (u \nabla u) \, dxdy$. דרך אחרת היא לנסות להוכיח באמצעות הטענות בשאלה 6.